Calculatrices interdites.

— Ce problème est consacré à l'étude de suites complexes périodiques. Par définition, une suite complexe $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique si et seulement si :
il existe un entier naturel p, **différent de** 0, tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_n$.
On notera $\mathscr{P}$ l'ensemble de ces suites périodiques.

— Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathscr{P}$, tout entier $p > 0$ tel que pour tout entier n, $u_{n+p} = u_n$ est appelé **une** période de la suite U.
On notera $\mathscr{T}(U)$ l'ensemble des périodes d'une suite U.

— Pour les exemples on considérera la plupart du temps les suites $\Omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $C = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où, pour tout entier naturel n : $\omega_n = 1$ et $c_n = \mathrm{Re}(i^{n+1})$.

Les parties II, III et IV sont indépendantes les unes des autres.

Partie I

Désignons par $\mathscr{B}$ l'ensemble des suites complexes $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées. On rappelle que $\mathscr{B}$ est un espace vectoriel complexe et que l'application de $\mathscr{B}$ dans $\mathbb{R}$, $V \mapsto \|V\|_\infty = \sup\limits_{n\geqslant 0} |v_n|$ est une norme.

1) Premières propriétés de l'ensemble $\mathscr{P}$ des suites complexes périodiques :

   a) Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathscr{P}$.

      i) Démontrer l'existence d'une plus petite période p_0 de la suite U.

      ii) Montrer que : $\mathscr{T}(U) = p_0\mathbb{N}^* = \{p_0 q\ ,\ q \in \mathbb{N}^*\}$.

      iii) Déterminer les ensembles $\mathscr{T}(\Omega)$ et $\mathscr{T}(C)$ relatifs aux deux suites définies dans le préambule

   b) i) Démontrer que toute suite périodique est bornée.

      ii) Démontrer que l'ensemble $\mathscr{P}$ des suites complexes périodiques est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathscr{B}$.

   c) L'espace vectoriel $\mathscr{P}$ est-il de dimension finie ?

2) Étant donnés une suite U de $\mathscr{P}$, une période p de U et un entier naturel n, désignons par $A(U,p,n)$ le nombre complexe défini par la relation :

$$A(U,p,n) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u_{n+k}$$

   a) Démontrer que pour une suite U donnée de $\mathscr{P}$, le nombre complexe $A(U,p,n)$ ne dépend ni de l'entier naturel n, ni du choix de p dans $\mathscr{T}(U)$.

   On pourra montrer que pour tout entier n et toute période p de U, on a $A(U,p,n) = A(U,p_0,0)$ où p_0 est la plus petite période de U.

   Pour une suite U donnée de $\mathscr{P}$, on note $L(U)$ la valeur commune de ces nombres complexes $A(U,p,n)$. Ainsi pour toute période p de U, $L(U) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} u_k$.

b) Montrer que l'application $L : U \mapsto L(U)$ est une forme linéaire sur $\mathscr{P}$.

3) Démontrer que la forme linéaire L est lipschitzienne de $(\mathscr{P}, \| \, \|_\infty)$ vers $(\mathbb{C}, | \, |)$.

Déterminer le meilleur réel k tel que pour toute suite U de $\mathscr{P}$, $|L(U)| \leqslant k||U||_\infty$.

4) a) Calculer $L(\Omega)$ et $L(C)$ où Ω et C sont les suites définies dans le préambule.

b) Soit $\mathscr{P}_0$ le noyau de la forme linéaire L.

Soit $\mathscr{P}_1$ le sous-espace vectoriel engendré par la suite Ω définie dans le préambule ; démontrer que l'espace vectoriel $\mathscr{P}$ est égal à la somme directe des deux sous-espaces vectoriels $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$: $\qquad \mathscr{P} = \mathscr{P}_0 \oplus \mathscr{P}_1$.

Partie II - Étude d'un endomorphisme D_0 de $\mathscr{P}_0$

À tout élément $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathscr{P}$, associons la suite $U' = (u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par la relation :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u'_n = u_{n+1} - u_n.$$

5) Démontrer que, pour tout U de $\mathscr{P}$, la suite U' appartient à $\mathscr{P}$.

Dans la suite de cette partie on considère l'application D de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ définie par $D : U \mapsto U'$.

6) Etablir que D est un endomorphisme de $\mathscr{P}$.

7) Montrer que cette application linéaire D de $(\mathscr{P}, \| \, \|_\infty)$ dans lui-même est lipschitzienne.

Déterminer le meilleur réel k tel que pour toute suite U de $\mathscr{P}$, $||D(U)||_\infty \leqslant k||U||_\infty$.

8) Déterminer les images $D(\Omega)$ et $D(C)$ des suites définies dans le préambule.

9) Déterminer le noyau de D. Déterminer $\mathrm{Im}(D)$.

10) Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathscr{P}_0$ est stable par D et que l'endomorphisme de $\mathscr{P}_0$ induit par D est un automorphisme, qui est noté D_0.

11) Déterminer les valeurs et vecteurs propres de D_0.

Partie III - Étude d'une application linéaire de $\mathscr{P}_0$ dans $\mathscr{P}$

À tout élément $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathscr{P}$, associons la suite $U^* = (u^*_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par la relation :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u^*_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

12) Démontrer que l'application $\theta : U \mapsto U^*$ est une application linéaire de $\mathscr{P}_0$ dans $\mathscr{P}$.

13) Déterminer le noyau et l'espace image de cette application linéaire θ.

14) L'application linéaire θ de $\mathscr{P}_0$ dans $\mathscr{P}$ (tous deux munis de $\| \, \|_\infty$) est-elle lipschitzienne ?

Partie IV

Soient $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathscr{P}$ et α un réel supérieur ou égal à 1. L'objet de cette partie est d'étudier la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{n^\alpha}$.

15) Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathscr{P}$ et α un réel strictement supérieur à 1.
    Étudier la nature de la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$.
    Étudier la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{n^\alpha}$, $n \geqslant 1$.

16) Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathscr{P}$ de période p ; supposons le réel α égal à 1 ; pour étudier la convergence de la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{n}$, $n \geqslant 1$, considérons les nombres complexes w_k, $k \geqslant 1$, définis par la relation :

$$w_k = v_{kp} + v_{kp+1} + \cdots + v_{kp+p-1}.$$

   a) Vérifier que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad w_k = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{u_j}{kp+j}$$

   b) En supposant les deux entiers p et j **fixés** ($p > 0$, $j \geqslant 0$), déterminer le développement limité à l'ordre 2 de $\frac{1}{kp+j}$ selon les puissances de $\dfrac{1}{k}$, lorsque l'entier k tend vers $+\infty$.

   c) En déduire la nature de la série de terme général w_k, $k \geqslant 1$, lorsque la suite U appartient à $\mathscr{P}$ sans appartenir à $\mathscr{P}_0$ puis, lorsque la suite U appartient à $\mathscr{P}_0$. (déterminer un développement limité à l'ordre 2 de w_k selon les puissances de $\dfrac{1}{k}$, puis discuter).

   d) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, exprimer la somme partielle $\sum\limits_{n=1}^{N} v_n$ en fonction d'une somme partielle $\sum\limits_{k=1}^{K} w_k$ et d'un "petit" nombre de termes de la suite (v_n).
   En déduire que les séries $\sum(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $\sum(w_k)_{k\geqslant 1}$ sont de même nature, et qu'en cas de convergence elles ont la même somme.

   e) Justifier que $\sum(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge si et seulement si $U \in \mathscr{P}_0$.

   Désormais, désignons par S la forme linéaire qui, à une suite U appartenant à $\mathscr{P}_0$, fait correspondre le réel $S(U) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_n}{n}$.

17) Premier exemple
    Soit $C = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie dans le préambule. Calculer $S(C)$.
    On pourra utiliser un développement en série entière de la fonction arctangente.

18) Deuxième exemple
    Dans cette question, q est un entier donné strictement positif.

   a) Soit I_q l'intégrale définie par la relation : $I_q = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+t+\ldots+t^{q-1}}{1+t^q}\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que $I_q \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2k}$ et en déduire la limite de la suite réelle $(I_q)_{q\geqslant 1}$ lorsque l'entier q tend vers $+\infty$.

b) Soit $Z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite appartenant à $\mathscr{P}_0$, de période $2q$ vérifiant :

$$\forall n \in [\![1, q]\!] \quad z_n = 1 \text{ et } \forall n \in [\![q+1, 2q]\!] \quad z_n = -1.$$

Étant donné un entier N strictement positif, soit V_N le réel défini par la relation

$$V_N = \sum_{n=1}^{2qN} \frac{z_n}{n}.$$

Montrer que

$$V_N = \int_0^1 (1 + t + \ldots + t^{q-1})(1 - t^q + t^{2q} - \ldots + t^{q(2N-2)} - t^{q(2N-1)}) \, \mathrm{d}t$$

En déduire que $S(Z) = I_q$.

c) Déduire des résultats précédents que la forme linéaire S définie sur $(\mathscr{P}_0, \| \, \|_\infty)$, n'est pas lipschitzienne.