

Dans tout ce document $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé

Montrer qu'une partie est ouverte

Soit X une partie de E . Voici les méthodes classiques pour montrer que X est un ouvert.

- A) On revient à la définition. Une partie X de E est ouverte si et seulement si pour tout élément x de X , il existe un réel $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset X$.
- B) On montre que X est une réunion (quelconque) de parties ouvertes ou une intersection finie d'ouverts.
- C) On montre que X est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue.
- D) On montre que son complémentaire est fermé.

Donnons quelques exemples de ces méthodes.

- On considère $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $X = \{f \in E, f > 0\}$. Montrons que X est ouvert en utilisant la méthode A). Pour toute fonction f de X , comme elle est continue sur un segment, elle est minorée (ce qui est évident ici) et atteint son minimum. Il existe donc $x_0 \in [0, 1]$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq f(x_0)$. Comme $f > 0$, on sait que $f(x_0) > 0$, on peut donc poser $\delta = \frac{f(x_0)}{2}$.

Il suffit alors de vérifier que $B(f, \delta) \subset X$. Soit g une fonction de cette boule, on a donc $\|g - f\|_\infty < \delta$. Pour tout x dans $[0, 1]$,

$$g(x) = f(x) + (g(x) - f(x)) > f(x_0) - \delta > 0$$

On a bien que g appartient à X et donc $B(f, \delta) \subset X$. La partie X est un ouvert de E .

- Montrons que $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On va utiliser la méthode C)
On considère $\det : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}$. On sait que le déterminant est une application polynomiale en les coordonnées¹. Maintenant, $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C}) = \det^{-1}(\mathbf{C}^*)$. Or \mathbf{C}^* est un ouvert de \mathbf{C} car son complémentaire $\{0\}$ est un fermé. Finalement, $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.
- Si E est un \mathbf{R} espace vectoriel de dimension finie et si $\ell : E \rightarrow \mathbf{R}$ est une forme linéaire, pour tout $a \in \mathbf{R}$, $X = \{x \in E, \ell(x) > a\}$ est un ouvert. En effet $X = \ell^{-1}(]a, +\infty[)$ or ℓ est continue car c'est une application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie et $]a, +\infty[$ est un ouvert.

1. car si $M = (m_{ij})$, alors $\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) m_{1\sigma(1)} \times \cdots \times m_{n\sigma(n)}$.

Montrer qu'une partie est fermée

Soit X une partie de E . Voici les méthodes classiques pour montrer que X est un fermé.

A) On utilise la caractérisation séquentielle.

Précisément, pour montrer que X est fermé, il suffit de montrer que toute suite (x_n) d'éléments de X qui converge (donc qui a une limite $\ell \in E$) a sa limite dans X .

B) On montre que X est une intersection (quelconque) de parties fermées ou une union finie de fermés.

C) On montre que X est l'image réciproque d'un fermé par une application continue.

D) On montre que son complémentaire $\complement_E X$ est ouvert.

Donnons quelques exemples de ces méthodes.

— On note \mathcal{S} l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ c'est-à-dire les matrices $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que

i) Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $m_{ij} \geq 0$

ii) Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n m_{ij} = 1$.

Montrons que \mathcal{S} est un fermé en utilisant la méthode A). Soit (M_p) une suite d'éléments de \mathcal{S} telle que la suite (M_p) converge vers une matrice M . Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $M[i, j] = \lim_{p \rightarrow \infty} M_p[i, j]$.

Comme pour tout $p \in \mathbf{N}$, $M_p \in \mathcal{S}$ on a $M_p[i, j]$ qui est une suite positive, sa limite est positive et donc $M[i, j] \geq 0$.

De plus, pour tout entier $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\sum_{j=1}^n M[i, j] = \sum_{j=1}^n \lim_{p \rightarrow \infty} M_p[i, j] = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n M_p[i, j] = 1$$

Enfinement $M \in \mathcal{S}$ ce qui montre que \mathcal{S} est fermé.

— Soit $\{x_1, \dots, x_N\}$ un ensemble fini de points de E , $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ est fermé comme union finie de singletons qui sont des fermés.

— Soit $\mathcal{B}(\mathbf{N})$ l'ensemble des suites réelles bornées et $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie. Soit $X = \{u \in \mathcal{B}, u \text{ croissante}\}$. Montrons que X est fermé. On considère son complémentaire Y . C'est l'ensemble des suites telles qu'il existe un entier n_0 vérifiant $u_{n_0+1} < u_{n_0}$. Soit u une telle suite et n_0 un entier correspondant. On pose $\delta = \frac{|u_{n_0+1} - u_{n_0}|}{3}$. Vérifions que $B(u, \delta)$ est inclus dans Y . Soit $v \in B(u, \delta)$. On a donc

$$v_{n_0+1} < u_{n_0+1} + \delta < u_{n_0} - \delta < v_{n_0}$$

On en déduit que Y est ouvert et donc X est fermé.

Montrer qu'une partie est compacte

Soit X une partie de E . Voici les méthodes classiques pour montrer que X est un compact.

- A) Si E est de dimension finie, on utilisera **la plupart du temps** le fait que X est compact si et seulement si X est fermé et borné.
- B) On revient à la définition. On considère une suite (x_n) d'éléments de X et on construit une sous-suite convergente.
- C) On montre que X est l'image directe d'un compact K par une application continue. Assez souvent K sera alors compact comme produit d'un nombre fini de compact.

Donnons quelques exemples de ces méthodes.

- On reprend l'ensemble \mathcal{S} des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On sait que \mathcal{S} est fermé. Pour montrer que \mathcal{S} est compact, il suffit de montrer qu'il est borné car $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est de dimension finie. Par définition de \mathcal{S} , tout coefficient d'une matrice M appartient à $[0, 1]$ donc $\mathcal{S} \subset \overline{B}_\infty(0, 1)$. On en déduit que \mathcal{S} est borné et donc compact.
- Soit K_1, \dots, K_p un nombre fini de compacts. On pose $X = \bigcup_{i=1}^p K_i$. Montrons que X est compact. On considère une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de X . Il existe $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ tel que $Z_i = \{n \in \mathbf{N}, x_n \in K_i\}$ est infini car $\mathbf{N} = \bigcup_{i=1}^p Z_i$. On peut donc trouver une extractive φ strictement croissante de \mathbf{N} dans \mathbf{N} telle que $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ soit à valeurs dans K_i . Comme K_i est compact, il existe une extractive ψ strictement croissante de \mathbf{N} dans \mathbf{N} telle que $(x_{\varphi(\psi(n))})_{n \geq 0}$ converge. On a bien montré que X était compact.

Exercice : Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ est un compact.