1) On suppose que $\alpha < 0$. On en déduit alors que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \sim -\frac{\alpha}{n}$. De ce fait, à partir d'un certain rang N, on aura $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 > 0$ et donc la suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ est croissante. On en déduit qu'elle ne peut donc pas tendre vers 0 (car minorée par $u_N > 0$). La série $\sum u_n$ diverge donc grossièrement.

2) Soit $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} &= 1 - \frac{\alpha}{n} - \frac{(n+1)^{-\beta}}{n^{-\beta}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= 1 - \frac{\alpha}{n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= 1 - \frac{\alpha}{n} - \left(1 - \frac{\beta}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{\beta - \alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

3) On suppose $\alpha > 1$ et on prend $\beta \in]1, \alpha[$. Comme on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \sim \dfrac{\beta - \alpha}{n}$ et que $\beta - \alpha < 0$, il existe un rang N tel que pour $n \geqslant N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 0$ ce qui implique que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ puis que

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} < \frac{u_n}{v_n}.$$

La suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geqslant N}$ est décroissante. C'est une suite de termes positifs, elle est donc bornée. Cela implique que $u_n = O(v_n)$.
Or $\beta > 1$, donc, d'après les séries de Riemann $\sum v_n$ converge et donc $\sum u_n$ converge par comparaison pour les séries à termes positifs.

4) On suppose $\alpha < 1$ et on prend $\beta \in]\alpha, 1[$. On peut procéder comme, ci-dessus. Cette fois, il existe un rang N tel que pour $n \geqslant N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} > 0$ ce qui implique que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ puis que

$$\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} < \frac{v_n}{u_n}.$$

On peut donc en déduire que $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n \geqslant N}$ est décroissante. C'est une suite de termes positifs, elle est donc bornée. Cela implique que $v_n = O(u_n)$. Or, comme $\beta < 1$, la série $\sum v_n$ diverge donc, $\sum u_n$ aussi.

5) Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

a) On a bien

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{n(\ln n)^2}{(n+1)(\ln(n+1))^2} \\
&= = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \times \left(\frac{\ln n + \ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln n}\right)^{-2} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \times \left(1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln n}\right)^{-2} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \times \left(1 - \frac{2}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

On est bien dans le cas de l'énoncé avec $\alpha = 1$.

b) Pour étudier la nature de $\sum u_n$ on réalise une comparaison série-intégrale.

On pose $f : t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$ comme $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln t$ sont des fonctions croissantes de $]1; +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto t(\ln t)^2$ est croissante de $]1; +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et f est décroissante de $]1; +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On peut appliquer le résultat de comparaison série-intégrale. Pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t(\ln t)^2} dt = \int_{2}^{n+1} \frac{1}{t(\ln t)^2} dt = \left[-\frac{1}{\ln t} \right]_2^{n+1} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n + 1} \leqslant \frac{1}{\ln 2}$$

On en déduit que les sommes partielles de la série $\sum u_n$ sont majorées. Comme c'est une série à terme positifs, elle est convergente.

6) Si on prend la série $u_n = \frac{1}{n}$. On a bien

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On est bien dans le cas $\alpha = 1$ et la série $\sum u_n$ diverge.