Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe un réel α tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ dans le cas où $\alpha < 0$.
   On pourra commencer par déterminer le sens de variations de (u_n).

Dans toute la suite, on suppose que $\alpha \geqslant 0$. On pose (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ où $\beta \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\beta - \alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
3) On suppose que $\alpha > 1$, montrer que si $\beta \in]1, \alpha[$ alors $u_n = O(v_n)$ et en déduire la nature de $\sum u_n$.
4) On suppose que $\alpha < 1$, déterminer la nature de $\sum u_n$.
5) On suppose dans cette question que pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$.
   a) Montrer que (u_n) vérifie les hypothèses de l'énoncé ; on précisera la valeur de α.
   b) Déterminer la nature de $\sum u_n$.
      On pourra utiliser une comparaison série-intégrale.
6) Trouver une suite (u_n) vérifiant les hypothèses de l'énoncé pour $\alpha = 1$ telle que la série $\sum u_n$ diverge.