Exercice 1

1) La fonction f est continue sur $[1, \infty[$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sur l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$, on peut minorer f par $x \mapsto \frac{\sin^2 x}{(n+1)\pi}$ car $\sin^2$ est positive.
On a donc $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f \geqslant \frac{K}{(n+1)\pi}$ avec

$$K = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2(x)dx = \int_0^\pi \sin^2(u+n\pi)du = \int_0^\pi \sin^2(u)du.$$

constante indépendante de n.
La valeur de K peut être calculée en linéarisant $\sin^2$ et vaut $\pi/2$. On peut également sans calcul voir que $K > 0$ comme intégrale sur un intervalle non trivial d'une fonction continue positive non identiquement nulle.
Comme la série harmonique diverge et est à termes positifs, on $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, donc par le théorème d'encadrement, $\displaystyle\int_\pi^{N\pi} f \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.
Ainsi $\displaystyle\int_\pi^\infty f$ diverge, donc $\displaystyle\int_1^\infty f$ diverge (donc ne converge pas absolument).
Donc $\boxed{f \text{ n'est pas intégrable sur } [1, \infty[.}$

2) Comme $1 - \cos$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \infty[$, on pourra écrire :

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \left[\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}\right]_0^\infty - \int_0^\infty (1-\cos x)\frac{-1}{2x^{3/2}} dx$$

et en déduire la convergence de l'intégrale au membre de gauche, sous réserve qu'au membre de droite, le crochet soit bien défini et l'intégrale converge.
Or c'est bien le cas car $\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}} = \frac{O_{x\to\infty}(1)}{\sqrt{x}} \underset{x\to\infty}{\to} 0$ et $\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}} = \frac{O_{x\to 0}(x^2)}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\to} 0$, donc le crochet est bien défini ; et $(1-\cos x)\frac{-1}{2x^{3/2}} = \begin{cases} O_{x\to\infty}(\frac{1}{x^{3/2}}) \\ O_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^{3/2}}\right) = O_{x\to 0}(1) \end{cases}$ donc l'intégrale au membre de droite est absolument convergente.
Ainsi $\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \text{ converge.}}$

Le lecteur observera ci-dessous le traitement RESPECTUEUX des valeurs absolues et se gardera de toute désinvolture à l'avenir envers ces petits traits verticaux.

$$\begin{aligned}
\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} x^{1/3} \sin x \, dx\right| &= \left|\int_0^\pi (u+n\pi)^{1/3} \sin(u+n\pi)du\right| \\
&= \left|(-1)^n \int_0^\pi (u+n\pi)^{1/3} \sin(u)du\right| \\
&= \int_0^\pi (u+n\pi)^{1/3} \sin(u)du \quad \text{par positivité de l'intégrale} \\
&\geqslant (n\pi)^{\frac{1}{3}} \int_0^\pi \sin(u)du \quad \text{par croissance et linéarité de l'intégrale}
\end{aligned}$$

avec $\int_0^\pi \sin(u)du > 0$ (cf question précédente).

Donc par le théorème d'encadrement, $|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} x^{1/3}\sin x\,dx| \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

Or si $\int_0^\infty x^{1/3}\sin x dx$ convergeait, on aurait

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} x^{1/3}\sin x dx = \int_0^{(n+1)\pi} x^{1/3}\sin x dx - \int_0^{n\pi} x^{1/3}\sin x dx \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^\infty x^{1/3}\sin x dx - \int_0^\infty x^{1/3}\sin x dx = 0$$

ce qui est contradictoire.

Donc $\boxed{\int_0^\infty x^{1/3}\sin x dx \text{ diverge}}$.

3) Soit $\alpha > 0$.

$x \mapsto -\cos x$ et $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, \infty[$.

Sous réserve d'existence du crochet,

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx = \left[\frac{\cos x}{x^\alpha}\right]_1^\infty - \int_1^\infty (-\cos x)\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}dx$$

en ce sens que les intégrales aux membre de gauche et de droite sont de même nature.

Or le crochet est bien défini car $\frac{\cos x}{x^\alpha} = \frac{O(1)}{x_\alpha} \underset{x\to\infty}{\to} 0$ puisque $\alpha > 0$.

De plus, $\int_1^\infty (-\cos x)\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}dx$ converge absolument car $(-\cos x)\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} = O_{x\to\infty}(\frac{1}{x^{\alpha+1}})$ et $x \mapsto \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ est intégrable au au voisinage de l'infini puisque $\alpha + 1 > 1$.

Ainsi $\boxed{\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx \text{ converge.}}$

Si $\alpha > 1$, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ converge absolument car $\frac{\sin x}{x^\alpha} = O_\infty(\frac{1}{x^\alpha})$ et $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable au voisinage de l'infini.

Si $\alpha \leqslant 1$, on raisonne comme dans la question 1 en minorant $|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx|$ par $\frac{K}{(n+1)^\alpha\pi^\alpha}$ avec $K = \int_0^\pi \sin > 0$.

4)

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\frac{1}{1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}} \\
&= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}(1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + O_{x\to\infty}(\frac{\sin^2 x}{x}) \quad \text{car } \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \underset{x\to\infty}{\to} 0 \\
&= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + O_{x\to\infty}(\frac{1}{x^{3/2}})
\end{aligned}$$

Comme $\int \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ converge et $\int_1^\infty O_{x\to\infty}(\frac{1}{x^{3/2}})$ converge absolument, et comme $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx$ diverge par la question 1, $\boxed{\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}dx \text{ diverge}}$ (car sinon $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx$ convergerait par linéarité de l'intégrale).

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\cos x} &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\frac{1}{1+\frac{\cos x}{\sqrt{x}}} \\
&= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}(1 - \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + O_{x\to\infty}(\frac{\cos^2 x}{x}) \quad \text{car } \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \underset{x\to\infty}{\to} 0 \\
&= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin(2x)}{2x} + O_{x\to\infty}(\frac{1}{x^{3/2}})
\end{aligned}$$

Or $\int_1^\infty \frac{\sin(2x)}{2x}dx$ est, par changement de variable, de même nature que $\int_2^\infty \frac{\sin(u)}{2u}du$ donc converge par le début de la question 3.

Ainsi $\boxed{\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\cos x}dx \text{ converge.}}$

Exercice 2

1) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des primitives. Soit H une primitive de f, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_a(x) = H(a+x) - H(a-x)$. On en déduit que F_a est de classe $\mathscr{C}^1$ comme somme et composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_a'(x) = H'(a+x) + H'(a-x) = f(a+x) + f(a-x)$$

Avec les notations précédentes, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F_a(-x) = H(a-x) - H(a+x) = -F_a(x)$$

On en déduit que F_a est impaire.
Comme f est strictement positive, on en déduit que F_a' aussi et que $\boxed{F_a \text{ est strictement croissante}}$.
On sait par hypothèse que la fonction f n'est pas intégrable. On en déduit que l'une (au moins) des intégrables $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f$ diverge.

— Supposons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ est divergente. Pour $x \geqslant a$,

$$F_a(x) = \int_{a-x}^{a+x} f(t)dt \geqslant \int_0^{a+x} f(t)dt$$

Quand x tend vers $+\infty$ le terme de droite de l'inégalité tend vers $+\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_a(x) = +\infty$.

— Supposons que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f$ est divergente. Pour $x \geqslant a$,

$$F_a(x) = \int_{a-x}^{a+x} f(t)dt \geqslant \int_{a-x}^0 f(t)dt$$

Quand x tend vers $+\infty$ le terme de droite de l'inégalité tend vers $+\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_a(x) = +\infty$.

Dans les deux cas, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} F_a(x) = +\infty}$

La fonction F_a étant impaire, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} F_a(x) = -\infty}$

2) La fonction F_a est continue (car elle est de classe $\mathscr{C}^1$), strictement croissante et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_a(x) = +\infty$ ainsi que $\lim\limits_{x \to -\infty} F_a(x) = -\infty$. Le théorème de la bijection nous dit que F_a réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ dans $]-\infty, +\infty[$. On en déduit qu'il existe un unique $x_a = F_a^{-1}(1)$ tel que $F_a(x_a) = 1$.

3) On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell > 0$.

   a) Soit $\varepsilon > 0$ et $X > 0$. Par définition, le fait que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ implique qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour $t \geqslant M$, $\ell - \varepsilon \leqslant f(t) \leqslant \ell + \varepsilon$.
   On pose alors $A = M + X$ et on remarque alors que pour $a \geqslant A$ et $x \in [0, X]$,

$$a - x \geqslant M + X - x \geqslant M$$

   En particulier pour tout $t \in [a-x, a+x]$, $\ell - \varepsilon \leqslant f(t) \leqslant \ell + \varepsilon$. Par intégration on obtient

$$2x(\ell - \varepsilon) = \int_{a-x}^{a+x} (\ell - \varepsilon)dt \leqslant \int_{a-x}^{a+x} f(t)dt = F_a(x) \leqslant \int_{a-x}^{a+x} (\ell + \varepsilon)dt \leqslant 2x(\ell + \varepsilon)$$

b) Commençons par regarder l'indication. On pose $X > \dfrac{1}{\ell}$ et $\varepsilon \in]0, \frac{\ell}{2}[$. En appliquant le résultat ci-dessus, il existe $A_0 > 0$ tel que pour $a \geqslant A_0$,

$$F_a\left(\frac{1}{\ell}\right) \geqslant 2 \times \frac{1}{\ell} \times (\ell - \varepsilon) > \frac{2}{\ell} \cdot \frac{\ell}{2} = 1$$

car $\frac{1}{\ell} \in [0, X]$.
Soit $a \geqslant A_0$, la fonction F_a^{-1} est croissante (comme réciproque d'une fonction strictement croissante), on en déduit que

$$g(a) = x_a = F_a^{-1}(1) \leqslant F_a^{-1}(F_a(1/\ell)) = \frac{1}{\ell}$$

Cela montre que g est bornée au voisinage de $+\infty$.

c) D'après la question précédente, il existe $A_0 \in \mathbb{R}$ et $X > 0$ tel que pour tout $a \geqslant A_0$, $0 < g(a) \leqslant X$.
Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question a), il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall a \geqslant A \quad \forall x \in [0, X] \quad 2x(\ell - \varepsilon) \leqslant F_a(x) \leqslant 2x(\ell + \varepsilon)$$

Ainsi

$$\forall a \geqslant \max(A, A_0), \quad 2g(a)(\ell - \varepsilon) \leqslant 1 \leqslant 2g(a)(\ell + \varepsilon)$$

$$\forall a \geqslant \max(A, A_0), \quad \ell - \varepsilon \leqslant \frac{1}{2g(a)} \leqslant \ell + \varepsilon$$

Par définition de la limite, $\frac{1}{2g(a)}$ tend vers ℓ quand a tend vers l'infini.
Donc $g(a) = \frac{1}{2\frac{1}{2g(a)}}$ tend vers $\frac{1}{2\ell}$ quand a tend vers l'infini.