MP1 / MP2

# Devoir libre 2

2020 - 2021

## Exercice 1

1) En minorant $f : x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{x}$ sur des intervalles bien choisis, montrer que $f$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.
2) Dterminer la nature des intgrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{3}} \sin x \, dx$.
3) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$ converge pour tout $\alpha > 0$,.
   Montrer galement que $g_\alpha : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
4) Etudier la nature des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x}\, dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \cos x}\, dx$.

## Exercice 2

Soit $f$ une fonction dfinie et continue sur $\mathbb{R}$,  valeurs strictement positives.
On suppose que $f$ n'est pas intgrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $a$ dans $\mathbb{R}$, on dfinit l'application $F_a$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $F_a(x) = \displaystyle\int_{a-x}^{a+x} f(t)\, dt$.

1) Montrer que $F_a$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, calculer sa drive. Montrer que $F_a$ est impaire, et dresser son tableau de variation en prcisant ses limites aux bornes de l'ensemble de dfinition.
2) Montrer que pour tout $a$ dans $\mathbb{R}$, il existe un unique $x_a \in \mathbb{R}$ tel que $F_a(x_a) = 1$. On pose, dans la suite, $g(a) = x_a$.
3) On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell > 0$.
   a) Soit $\varepsilon > 0$ et $X > 0$. Montrer que :
   $$\exists A \in \mathbb{R} \quad \forall a \geqslant A \quad \forall x \in [0, X] \quad 2x(\ell - \epsilon) \leqslant F_a(x) \leqslant 2x(\ell + \varepsilon)$$
   b) En dduire que $g$ est borne au voisinage de $+\infty$.
   indication : on pourra montrer que $F_a(1/\ell) > 1$ pour $a$ suffisamment grand.
   c) Dduire des deux question prcdentes que $g(a) \underset{a \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\ell}$.