Rappels d'algèbre linéaire

Lycée Chateaubriand

Table des matières

1. **Espaces vectoriels**
   - Définitions
   - Familles de vecteurs
   - Sommes
2. **Applications linéaires**
   - Rappels sur le rang
   - Parties stables
3. **Matrices**
   - Changement de bases
   - Matrices semblables
   - Trace
   - Calcul par blocs

1 **Espaces vectoriels**

Définitions

2 Applications linéaires

3 Matrices

Introduction

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. En pratique tout restera vrai si $\mathbb{K}$ est un corps en général.

Exercice : Pouvez-vous citer quelques corps ?

Introduction

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. En pratique tout restera vrai si $\mathbb{K}$ est un corps en général.

Exercice : Pouvez-vous citer quelques corps ?

- Les corps $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{Q}$.

Introduction

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. En pratique tout restera vrai si $\mathbb{K}$ est un corps en général.

Exercice : Pouvez-vous citer quelques corps ?

- Les corps $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{Q}$.
- Le corps $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Introduction

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. En pratique tout restera vrai si $\mathbb{K}$ est un corps en général.

Exercice : Pouvez-vous citer quelques corps ?

- Les corps $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{Q}$.
- Le corps $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- Nous verrons cette année les corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour p premier.

Définition 1 (Espace vectoriel)

On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel un triplet $(E, +, .)$ où E est un ensemble, $+$ une loi interne de E et $.$ une loi externe :

$$+ : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array} \quad \text{et} \quad . : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda.u \end{array}$$

Vérifiant

- $(E, +)$ *est un groupe abélien*
- *La loi . vérifie*
  - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall u \in E, (\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u$
  - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall u \in E, (\lambda \times \mu).u = \lambda.(\mu.u)$
  - $\forall u \in E, 1.u = u$

Remarque : Rappelons que le fait que $(E, +)$ soit un groupe abélien signifie que

Remarque : Rappelons que le fait que $(E, +)$ soit un groupe abélien signifie que

- La loi $+$ est associative c'est-à-dire

$$\forall (a, b, c) \in E^3, \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

Remarque : Rappelons que le fait que $(E, +)$ soit un groupe abélien signifie que

- La loi $+$ est associative c'est-à-dire

$$\forall (a, b, c) \in E^3, \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

- La loi $+$ est commutative c'est-à-dire

$$\forall (a, b) \in E^2, \quad a + b = b + a$$

Remarque : Rappelons que le fait que $(E, +)$ soit un groupe abélien signifie que

- La loi $+$ est associative c'est-à-dire

$$\forall (a, b, c) \in E^3, \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

- La loi $+$ est commutative c'est-à-dire

$$\forall (a, b) \in E^2, \quad a + b = b + a$$

- Il existe un élément neutre noté 0_E tel que pour tout $u \in E$, $u + 0_E = 0_E + u = u$.

Remarque : Rappelons que le fait que $(E, +)$ soit un groupe abélien signifie que

- La loi $+$ est associative c'est-à-dire

$$\forall (a, b, c) \in E^3, \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

- La loi $+$ est commutative c'est-à-dire

$$\forall (a, b) \in E^2, \quad a + b = b + a$$

- Il existe un élément neutre noté 0_E tel que pour tout $u \in E$, $u + 0_E = 0_E + u = u$.
- Tout élément u admet un symétrique (noté $-u$) qui vérifie que

$$u + (-u) = (-u) + u = 0_E$$

Définition 2 (Sous-espaces vectoriels)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle sous-espace vectoriel de E une partie $F \subset E$ telle que les lois $+$ et $.$ induisent une structure d'espace vectoriel sur F.

Remarque : Soit $F \subset E$. C'est un sous-espace vectoriel si et seulement si :

Définition 2 (Sous-espaces vectoriels)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle sous-espace vectoriel de E une partie $F \subset E$ telle que les lois $+$ et $.$ induisent une structure d'espace vectoriel sur F.

Remarque : Soit $F \subset E$. C'est un sous-espace vectoriel si et seulement si :

- $F \neq \emptyset$

Définition 2 (Sous-espaces vectoriels)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle sous-espace vectoriel de E une partie $F \subset E$ telle que les lois $+$ et . induisent une structure d'espace vectoriel sur F.

Remarque : Soit $F \subset E$. C'est un sous-espace vectoriel si et seulement si :

- $F \neq \emptyset$
- pour tout $(u, v) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda u + \mu v \in F$.

1 Espaces vectoriels

Familles de vecteurs

2 Applications linéaires

3 Matrices

Définition 3 (Combinaison linéaire)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On appelle combinaison linéaire des $(u_i)_{i\in I}$ tout vecteur w de la forme

$$w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$$

où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille presque nulle de scalaires ; c'est-à-dire qu'il existe un ensemble fini $J \subset I$ tel que si $i \in I \setminus J$, $\lambda_i = 0$.

Définition 3 (Combinaison linéaire)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On appelle combinaison linéaire des $(u_i)_{i\in I}$ tout vecteur w de la forme

$$w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$$

où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille presque nulle de scalaires ; c'est-à-dire qu'il existe un ensemble fini $J \subset I$ tel que si $i \in I \setminus J$, $\lambda_i = 0$.

Notations : On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles de scalaires presque nulle.

Définition 3 (Combinaison linéaire)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On appelle combinaison linéaire des $(u_i)_{i\in I}$ tout vecteur w de la forme

$$w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$$

où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille presque nulle de scalaires ; c'est-à-dire qu'il existe un ensemble fini $J \subset I$ tel que si $i \in I \setminus J$, $\lambda_i = 0$.

Notations : On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles de scalaires presque nulle.

Remarque : Dans le cas où I est un ensemble fini (par exemple $I = [\![1, n]\!]$), la condition « presque nulle » est toujours vérifiée et on note juste

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.$$

Définition 3 (Combinaison linéaire)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On appelle combinaison linéaire des $(u_i)_{i\in I}$ tout vecteur w de la forme

$$w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$$

où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille presque nulle de scalaires ; c'est-à-dire qu'il existe un ensemble fini $J \subset I$ tel que si $i \in I \setminus J$, $\lambda_i = 0$.

Notations : On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles de scalaires presque nulle.

Remarque : Dans le cas où I est un ensemble fini (par exemple $I = [\![1, n]\!]$), la condition « presque nulle » est toujours vérifiée et on note juste

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.$$

Notations : On note $\mathrm{Vect}((u_i)_{i\in I})$ l'ensemble des combinaisons linéaires. C'est le plus petit espace vectoriel qui contient tous les éléments de la famille. C'est l'espace vectoriel engendré par la famille.

On considère l'espace vectoriel des suites $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose $u(i)$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(i)_n = \delta_{i,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer $F = \mathrm{Vect}(u(i))_{i\in\mathbb{N}}$

L'espace engendré est celui des suites stationnaires à 0.

$$F = \{(w_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ , \ \exists N, i \geq N \Rightarrow i_n = 0\}$$

En effet si w est stationnaire à 0 si N désigne un entier tel que pour $i \geq N$, $w_i = 0$ alors

$$w = \sum_{i=0}^{N} w_i . u(i)$$

L'espace engendré est celui des suites stationnaires à 0.

$$F = \{(w_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ , } \exists N, i \geq N \Rightarrow i_n = 0\}$$

En effet si w est stationnaire à 0 si N désigne un entier tel que pour $i \geq N$, $w_i = 0$ alors

$$w = \sum_{i=0}^{N} w_i.u(i)$$

Réciproquement si $w \in \mathrm{Vect}(u(i))_{i \in \mathbb{N}}$ il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ telle que

$$w = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i.u(i)$$

Comme la famille (λ_i) est presque nulle, il existe un entier N tel que pour $i \geq N$, $\lambda_i = 0$. La suite w est donc stationnaire à 0 car pour $i \geq N$, $w_i = 0$.

Exercice : Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, 3, -2)$, $u_2 = (2, 1, 0, 0)$ et $u_3 = (1, 2, 9, -13)$. On pose $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

Déterminer la dimension de F et le décrire via un système d'équations.

Définition 4 (Famille libre)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ *une famille de vecteurs. Elle est libre si la famille nulle est la seule famille de scalaires presque nulle* $(\lambda_I)_{i\in I}$ *telle que* $\sum_{i\in I} \lambda_i u_i = 0$.

C'est-à-dire :

$$((u_i)_{i\in I} \text{ libre }) \iff \left(\forall (\lambda_i)_i \in \mathbb{K}^{(I)}, \sum_{i\in I} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0\right)$$

Définition 4 (Famille libre)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ *une famille de vecteurs. Elle est libre si la famille nulle est la seule famille de scalaires presque nulle* $(\lambda_I)_{i\in I}$ *telle que* $\sum_{i\in I} \lambda_i u_i = 0$.

C'est-à-dire :

$$((u_i)_{i\in I}) \textit{ libre }) \iff (\forall (\lambda_i)_i \in \mathbb{K}^{(I)}, \sum_{i\in I} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0)$$

Remarque : Cela revient à demander que toute sous-famille finie est libre.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_k = (t \mapsto \sin(t^k))$. Montrons que la famille $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est libre.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_k = (t \mapsto \sin(t^k))$. Montrons que la famille $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est libre.

Supposons par l'absurde qu'il existe une famille $(\lambda_k) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N}^*)}$ qui ne soit pas nulle telle que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \lambda_k u_k = 0.$$

Si on note $p = \min\left(k \in \mathbb{N}^* \mid \lambda_k \neq 0\right)$ le plus petit indice tel que $\lambda_k \neq 0$. On a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \lambda_k u_k \underset{0}{\sim} \lambda_p t^p$$

Donc $\lambda_p = 0$ ce qui est absurde. La famille est bien libre

Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes tels que

$$\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow \deg(P_i) \neq \deg(P_j)$$

Montrons que la famille est libre.

Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes tels que

$$\forall (i,j)\in I^2, i\neq j \Rightarrow \deg(P_i)\neq \deg(P_j)$$

Montrons que la famille est libre.

Supposons par l'absurde qu'il existe une combinaison linéaire non triviale $\displaystyle\sum_{i\in I}\lambda_i P_i = 0$. Soit i_0 l'indice tel que P_{i_0} soit de degré maximal parmi les polynômes P_i où $\lambda_i \neq 0$ (les polynômes qui apparaissent réellement dans la combinaison linéaire). On a alors

$$\lambda_{i_0} P_{i_0} = -\sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \lambda_i P_i$$

Le polynôme de droite est de degré strictement inférieur à celui de gauche. C'est absurde.

La famille est donc libre.

On pose $f_a : x \mapsto e^{ax}$. Montrer que $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

On pose $f_a : x \mapsto e^{ax}$. Montrer que $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

Là encore, par l'absurde on suppose qu'il existe $(\lambda_a) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{R})}$ telle que

$$\sum_{a\in\mathbb{R}} \lambda_a f_a = 0$$

Soit a_0 le plus grand réel tel que $\lambda_a \neq 0$. On obtient que

$$\sum_{a\in\mathbb{R}} \lambda_a f_a \underset{+\infty}{\sim} \lambda_{a_0} e^{a_0 x}$$

car si $a < b$ alors $f_a = \underset{+\infty}{o}(f_b)$.

Cela montre que λ_{a_0} est nul ce qui est absurde.

La famille est donc libre.

On considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, 0, -1)$, $u_2 = (2, 0, 1, 1)$, $u_3 = (-1, 2, 0, 3)$ et $u_4 = (0, 1, 0, 1)$. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ?

Définition 5 (Famille Génératrice)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On dit qu'elle engendre E si $E = Vect((u_i)_{i\in I})$ c'est-à-dire que tous les vecteurs de E sont des combinaisons linéaires de vecteurs de la famille.

Définition 5 (Famille Génératrice)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On dit qu'elle engendre E si $E = Vect((u_i)_{i\in I})$ c'est-à-dire que tous les vecteurs de E sont des combinaisons linéaires de vecteurs de la famille.

ATTENTION

La notion de famille libre est intrinsèque à la famille, c'est-à-dire que si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille d'un sous-espace vectoriel F, on peut travailler dans E ou dans F pour montrer que la famille est libre. Par contre, la notion de famille génératrice ne l'est pas. Une famille peut engendrer F sans engendrer E.

Définition 5 (Famille Génératrice)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On dit qu'elle engendre E si $E = Vect((u_i)_{i\in I})$ c'est-à-dire que tous les vecteurs de E sont des combinaisons linéaires de vecteurs de la famille.

ATTENTION

La notion de famille libre est intrinsèque à la famille, c'est-à-dire que si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille d'un sous-espace vectoriel F, on peut travailler dans E ou dans F pour montrer que la famille est libre. Par contre, la notion de famille génératrice ne l'est pas. Une famille peut engendrer F sans engendrer E.

Exemple : La famile $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{K}[X]$.

Définition 6

Une famille de vecteurs $(u_i)_{i\in I}$ *est une base de* E *si c'est une famille libre et génératrice de* E.

Théorème 2

Soit $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E. Pour tout vecteur w il existe une unique famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que

$$w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$$

Théorème 2

Soit $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E. Pour tout vecteur w il existe une unique famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que

$$w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$$

Remarque :

- Le fait que la famille est génératrice implique qu'il existe (au moins une) famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que $w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$.
- Le fait qu'elle soit libre implique qu'il existe au plus une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que $w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$. En effet s'il y en a deux distinctes en faisant la différence on trouve une famille encore presque nulle $(\mu_i)_{i\in I}$ telle que $\sum_{i\in I} \mu_i u_i = 0$.

Définition 7

Soit $\mathscr{B} = (u_i)_{i\in I}$ *une base de E. Pour tout vecteur w, l'unique famille presque nulle* $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$ *telle que*

$$\sum_{i\in I} \lambda_i u_i = w$$

s'appelle les coordonnées de w dans la base $\mathscr{B}$.

Définition 7

Soit $\mathscr{B} = (u_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour tout vecteur w, l'unique famille presque nulle $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i u_i = w$$

s'appelle les coordonnées de w dans la base $\mathscr{B}$.

Remarque : Il a été vu en première année que tout espace vectoriel de dimension finie admettait un base. Il est possible de démontrer que tout espace vectoriel admet des bases (hors programme) cependant dans certains cas on ne peut pas en exhiber. Par exemple $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 7

Soit $\mathscr{B} = (u_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour tout vecteur w, l'unique famille presque nulle $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i u_i = w$$

s'appelle les coordonnées de w dans la base $\mathscr{B}$.

Remarque : Il a été vu en première année que tout espace vectoriel de dimension finie admettait un base. Il est possible de démontrer que tout espace vectoriel admet des bases (hors programme) cependant dans certains cas on ne peut pas en exhiber. Par exemple $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice : Soit $u_1 = (2,0,1)$, $u_2 = (-1,1,1)$, $u_3 = (1,3,5)$ et $u_4 = (1,2,3)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) engendre $\mathbb{R}^3$ et en extraire une base.

ATTENTION

Quand on travaille dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, les vecteurs sont des n-uplets.

$$u = (x_1, \dots, x_n)$$

où $x_1, \dots, x_n$ sont les **composantes** du vecteurs.
Il y a une base dite canonique $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$e_i = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0, \dots, 0)$$

Les **coordonnées** du vecteur u dans cette base sont $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ car

$$u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Mais si on considère les coordonnées de ce vecteur dans une autre base, elles ne seront plus égales aux composantes.

Définition 8 (Rang)

Soit $\mathscr{F} = (u_i)_{i \in I}$. On appelle rang de la famille $\mathscr{F}$ et on note $\operatorname{rg}(\mathscr{F})$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par la famille quand il est de dimension finie.

Définition 8 (Rang)

Soit $\mathscr{F} = (u_i)_{i\in I}$*. On appelle rang de la famille* $\mathscr{F}$ *et on note* $\mathrm{rg}(\mathscr{F})$ *la dimension de l'espace vectoriel engendré par la famille quand il est de dimension finie.*

Proposition 4

Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.

1. Si E est de dimension finie n. Alors $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leq n$.
2. Si $\mathscr{F}$ est de cardinal n. Alors $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leq n$.

ATTENTION

Ne pas mélanger les notions de rang, cardinal et dimension :

- On peut parler du rang ou du cardinal d'une famille mais pas de sa dimension.
- On peut parler de la dimension (et du cardinal) d'un sous-espace vectoriel mais pas de son rang.

ATTENTION

Ne pas mélanger les notions de rang, cardinal et dimension :

- On peut parler du rang ou du cardinal d'une famille mais pas de sa dimension.
- On peut parler de la dimension (et du cardinal) d'un sous-espace vectoriel mais pas de son rang.

Proposition 6

Familles de vecteursRang Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E

1. On a $(\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim(E)) \iff$ (La famille $\mathscr{F}$ engendre E).
2. On a $(\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \#\mathscr{F}) \iff$ (La famille $\mathscr{F}$ est libre).
3. On a $(\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \#\mathscr{F} = \dim E) \iff$ (La famille $\mathscr{F}$ est une base de E).

1 Espaces vectoriels

Sommes

2 Applications linéaires

3 Matrices

Définition 9

Soit $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *des sous-espaces vectoriels, on appelle somme de* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *et on note* $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i$ *le plus petit sous-espace vectoriel contenant* $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$*. On a*

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \{u_1 + \cdots + u_n \mid (u_1, \ldots, u_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n\}$$

Définition 9

Soit $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels, on appelle somme de $F_1, F_2, \dots, F_n$ et on note $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i$ le plus petit sous-espace vectoriel contenant $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$. On a

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \{u_1 + \cdots + u_n \mid (u_1, \dots, u_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n\}$$

ATTENTION

Ne pas confondre l'union $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ et la somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$. Dans la majorité des cas, une union de sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel.

Définition 9

Soit $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels, on appelle somme de $F_1, F_2, \dots, F_n$ et on note $F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i$ le plus petit sous-espace vectoriel contenant $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$. On a

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = \{u_1 + \dots + u_n \mid (u_1, \dots, u_n) \in F_1 \times \dots \times F_n\}$$

ATTENTION

Ne pas confondre l'union $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ et la somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$. Dans la majorité des cas, une union de sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}^2$. On pose $F_1 = \mathrm{Vect}(u_1)$ et $F_2 = \mathrm{Vect}(u_2)$ où $u_1 = (1, -1)$ et $u_2 = (2, 1)$.

Le vecteur $w = (3, 0) = u_1 + u_2 \in F_1 + F_2$ mais $w \notin F_1 \cup F_2$.

Exemple : Dans $E=\mathbb{R}^3$, on note $F_1=\mathrm{Vect}(u_1)$ et $F_2=\mathrm{Vect}(u_2)$ où $u_1=(1,-1,0)$ et $u_2=(1,-2,1)$. Alors $F_1+F_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$.

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}^3$, on note $F_1 = \mathrm{Vect}(u_1)$ et $F_2 = \mathrm{Vect}(u_2)$ où $u_1 = (1, -1, 0)$ et $u_2 = (1, -2, 1)$. Alors $F_1 + F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

L'espace vectoriel $F_1 + F_2$ est de dimension 2 car c'est la somme de deux droites vectorielles non confondues.

Si on considère le plan vectoriel $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x + y + z = 0\}$, on peut constater que $u_1 \in F_1$ et que $u_2 \in F_2$. On peut en déduire que $F_1 + F_2 \subset P$.

Comme $\dim(F_1 + F_2) = \dim P$, on a $P = F_1 + F_2$.

Proposition 8

Soit $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels et $\mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_n$ des familles qui engendrent ces espaces alors la concaténée des familles engendre $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i$.

Démonstration : Ce résultat reste vrai dans le cas général mais nous ne l'utiliserons que dans le cadre d'espaces vectoriels de dimension finie. Pour alléger les notations nous ferons la démonstration uniquement dans ce cadre.

On note pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathscr{F}_i = (u_{i,1}, \dots, u_{i,p_i})$

Soit w un élément de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i$. Par définition, il existe $(w_1, \dots, w_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ tels que

$$w = w_1 + \cdots + w_n$$

Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, comme la famille $\mathscr{F}_i$ engendre F_i, il existe $(\lambda_{i,j})_{1 \leq j \leq p_i} \in \mathbb{K}^{p_i}$ tels que

$$w_i = \sum_{j=1}^{p_i} \lambda_{i,j} u_{i,j}$$

Finalement

$$w = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \lambda_{i,j} u_{i,j}$$

Cela montre que la concaténée des familles engendre $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i$.

Définition 10 (Somme directe)

Soit $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels. On dit qu'ils sont en somme directe si

$$\forall (u_1, \ldots u_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, u_1 + \cdots + u_n = 0 \Rightarrow u_1 = \cdots = u_n = 0$$

Dans ce cas on note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ la somme.

Définition 10 (Somme directe)

Soit $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels. On dit qu'ils sont en somme directe si

$$\forall (u_1, \dots u_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, u_1 + \cdots + u_n = 0 \Rightarrow u_1 = \cdots = u_n = 0$$

Dans ce cas on note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ la somme.

Remarque : Cela revient à dire que tout vecteur w de la somme se décompose de manière unique comme une somme $w = u_1 + \cdots + u_n$ où $u_i \in F_i$.

ATTENTION

Dans le cas de deux espaces vectoriels il y a une caractérisation plus simple :

F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si

ATTENTION

Dans le cas de deux espaces vectoriels il y a une caractérisation plus simple :

F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$

Cette caractérisation ne s'entend pas à plus de trois espaces vectoriels

Soit $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 1)$ et $u_3 = (1, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Les droites $\Delta_1 = \mathrm{Vect}(u_1)$, $\Delta_2 = \mathrm{Vect}(u_2)$ et $\Delta_3 = \mathrm{Vect}(u_3)$ vérifient que

$$\Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$

Pourtant, les trois droites ne sont pas somme directe car, par exemple,

$$u_1 + u_2 - u_3 = 0$$

ATTENTION

Des espaces peuvent être deux à deux en somme directe sans être en somme directe.

ATTENTION

Des espaces peuvent être deux à deux en somme directe sans être en somme directe.

Il suffit de prendre le même exemple.

Exercice : Montrer que $F_1, \cdots, F_n$ sont en somme directe si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, F_i est en somme directe avec $\displaystyle\sum_{j \neq i} F_j$.

Exercice : Montrer que $F_1, \cdots, F_n$ sont en somme directe si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, F_i est en somme directe avec $\sum_{j \neq i} F_j$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$, posons $G_i = \sum_{j \neq i} F_j$.

On procède par double inclusion.

- $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe.
  Montrons que $F_i \cap G_i = \{0\}$. On considère $u \in F_i \cap G_i$. Comme il appartient à G_i, il existe $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n) \in \prod_{j \neq i} F_j$ tels que

$$u = \sum_{j \neq i} v_j$$

  En notant $v_i = -u \in F_i$ on a alors $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$. Les espaces F_i étant en somme directe, on en déduit que $u = -v_i = 0$.

- $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, F_i est en somme directe avec G_i. Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq n} \in \prod_{i=1}^{n} F_i$ tels que $u_1 + \cdots + u_n = 0$. Pour tout entier i, on en déduit que $u_i = -\sum_{j \neq i} u_j$. Le terme de gauche appartient à F_i et celui de droite appartient) G_i. On en déduit que $u_i = 0$.
  Cela montre bien que les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe.

Proposition 11 (Formule de Grassman)

1. On a $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$
2. On a $(\dim(F_1 + \cdots + F_n) = \dim F_1 + \cdots + \dim F_n) \iff$ (la somme de $F_1, \ldots, F_n$ est directe).

1 Espaces vectoriels

2 **Applications linéaires**

Rappels sur le rang

3 Matrices

Définition 11

Soit u une application linéaire. On appelle rang de u et on note $rg(u)$ *la dimension de* $Im(u)$ *quand elle est finie. On a donc*

$$rg(u) = \dim(Im(u)).$$

Définition 11

Soit u une application linéaire. On appelle rang de u et on note $\mathrm{rg}(u)$ la dimension de $\mathrm{Im}(u)$ quand elle est finie. On a donc

$$rg(u) = \dim(Im(u)).$$

Proposition 12

Soit u une application linéaire de E dans F et $\mathscr{F}$ une famille génératrice de E.

1. La famille image $u(\mathscr{F})$ engendre $\mathrm{Im}(u)$.
2. On a donc $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(\mathscr{F}))$ (dans le cas où ce sont des nombres finis).

Définition 11

Soit u une application linéaire. On appelle rang de u et on note $\mathrm{rg}(u)$ la dimension de $\mathrm{Im}(u)$ quand elle est finie. On a donc

$$\mathrm{rg}(u) = \dim(Im(u)).$$

Proposition 12

Soit u une application linéaire de E dans F et $\mathscr{F}$ une famille génératrice de E.

1. La famille image $u(\mathscr{F})$ engendre $\mathrm{Im}(u)$.
2. On a donc $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(\mathscr{F}))$ (dans le cas où ce sont des nombres finis).

Remarque : On utilisera ce résultat essentiellement avec $\mathscr{F}$ une base de E.

Exemple : Déterminer le rang de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Théorème 13

Soit u une application linéaire de E dans F et S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E.

1. La restriction de u à S est injective : $\operatorname{Ker} u_{|S} = \{0\}$
2. L'application u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im}(u)$:

$$\tilde{u} : \begin{array}{ccc} S & \to & \operatorname{Im}(u) \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

Théorème 13

Soit u une application linéaire de E dans F et S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E.

1. La restriction de u à S est injective : $\operatorname{Ker} u_{|S} = \{0\}$
2. L'application u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im}(u)$:

$$\tilde{u} : \begin{array}{ccc} S & \to & \operatorname{Im}(u) \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

Corollaire 14 (Théorème du rang)

Soit u une application linéaire de E dans F. On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie.

1. Le noyau $\operatorname{Ker}(u)$ admet un supplémentaire S
2. On a

Théorème 13

Soit u une application linéaire de E dans F et S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E.

1. La restriction de u à S est injective : $\operatorname{Ker} u_{|S} = \{0\}$
2. L'application u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im}(u)$:

$$\tilde{u} : \begin{array}{ccc} S & \to & \operatorname{Im}(u) \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

Corollaire 14 (Théorème du rang)

Soit u une application linéaire de E dans F. On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie.

1. Le noyau $\operatorname{Ker}(u)$ admet un supplémentaire S
2. On a

$$\dim S = \dim(\operatorname{Im}(u)) \text{ et donc } \dim(\operatorname{Ker}(u)) + \operatorname{rg}(u) = \dim E$$

Proposition 15

Soit $u : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie.

1. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim F) \iff (u$ est
2. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim E) \iff (u$ est
3. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim E = \dim F) \iff (u$ est

Proposition 15

Soit $u : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie.

1. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim F) \iff (u$ est surjective$)$
2. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim E) \iff (u$ est
3. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim E = \dim F) \iff (u$ est

Proposition 15

Soit $u : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie.

1. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim F) \iff (u$ est surjective$)$
2. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim E) \iff (u$ est injective$)$
3. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim E = \dim F) \iff (u$ est

Proposition 15

Soit $u : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie.

1. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim F) \iff (u \text{ est surjective})$
2. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim E) \iff (u \text{ est injective})$
3. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim E = \dim F) \iff (u \text{ est bijective})$

Proposition 15

Soit $u : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie.

1. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim F) \iff (u$ est surjective$)$
2. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim E) \iff (u$ est injective$)$
3. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim E = \dim F) \iff (u$ est bijective$)$

Proposition 16

Soit $u : F \to G$ et $v : E \to F$ deux applications linéaires.

1. On a $\mathrm{rg}(u \circ v) \quad \mathrm{rg}(u)$ et $\mathrm{rg}(u \circ v) \quad \mathrm{rg}(v)$
2. Si u est un isomorphisme alors $\mathrm{rg}(u \circ v) =$
3. Si v est un isomorphisme alors $\mathrm{rg}(u \circ v) =$

Proposition 15

Soit $u : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie.

1. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim F) \iff (u \text{ est surjective})$
2. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim E) \iff (u \text{ est injective})$
3. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim E = \dim F) \iff (u \text{ est bijective})$

Proposition 16

Soit $u : F \to G$ et $v : E \to F$ deux applications linéaires.

1. On a $\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \mathrm{rg}(u)$ et $\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \mathrm{rg}(v)$
2. Si u est un isomorphisme alors $\mathrm{rg}(u \circ v) =$
3. Si v est un isomorphisme alors $\mathrm{rg}(u \circ v) =$

Proposition 15

Soit $u : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie.

1. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim F) \iff (u \text{ est surjective})$
2. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim E) \iff (u \text{ est injective})$
3. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim E = \dim F) \iff (u \text{ est bijective})$

Proposition 16

Soit $u : F \to G$ et $v : E \to F$ deux applications linéaires.

1. On a $\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \mathrm{rg}(u)$ et $\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \mathrm{rg}(v)$
2. Si u est un isomorphisme alors $\mathrm{rg}(u \circ v) = \mathrm{rg}(v)$
3. Si v est un isomorphisme alors $\mathrm{rg}(u \circ v) = \mathrm{rg}(u)$

Démonstration :

1. On sait que $(u \circ v)(E) \subset u(F)$ donc, en prenant les dimensions, $\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \mathrm{rg}(u)$.

Démonstration :

1. On sait que $(u \circ v)(E) \subset u(F)$ donc, en prenant les dimensions, $\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \mathrm{rg}(u)$. De même soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\mathrm{Im}(v)$ (où $p = \mathrm{rg}(v)$). Alors $(u(e_1), \ldots, u(e_p))$ engendre $\mathrm{Im}(u \circ v)$ donc

$$\mathrm{rg}(u \circ v) = \dim(\mathrm{Im}(u \circ v)) \leq p = \mathrm{rg}(v).$$

Démonstration :

1. On sait que $(u \circ v)(E) \subset u(F)$ donc, en prenant les dimensions, $\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \mathrm{rg}(u)$. De même soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\mathrm{Im}(v)$ (où $p = \mathrm{rg}(v)$). Alors $(u(e_1), \dots, u(e_p))$ engendre $\mathrm{Im}(u \circ v)$ donc
$$\mathrm{rg}(u \circ v) = \dim(\mathrm{Im}(u \circ v)) \leq p = \mathrm{rg}(v).$$

2. On suppose que u est un isomorphisme. On sait que $\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \mathrm{rg}(v)$. De plus $v = u^{-1} \circ (u \circ v)$ donc, $\mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(u^{-1} \circ (u \circ v)) \leq \mathrm{rg}(u \circ v)$. En combinant les deux inégalités, on obtient $\mathrm{rg}(u \circ v) = \mathrm{rg}(v)$.

Démonstration :

1. On sait que $(u \circ v)(E) \subset u(F)$ donc, en prenant les dimensions, $\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \mathrm{rg}(u)$. De même soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\mathrm{Im}(v)$ (où $p = \mathrm{rg}(v)$). Alors $(u(e_1), \dots, u(e_p))$ engendre $\mathrm{Im}(u \circ v)$ donc
$$\mathrm{rg}(u \circ v) = \dim(\mathrm{Im}(u \circ v)) \leq p = \mathrm{rg}(v).$$

2. On suppose que u est un isomorphisme. On sait que $\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \mathrm{rg}(v)$. De plus $v = u^{-1} \circ (u \circ v)$ donc, $\mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(u^{-1} \circ (u \circ v)) \leq \mathrm{rg}(u \circ v)$. En combinant les deux inégalités, on obtient $\mathrm{rg}(u \circ v) = \mathrm{rg}(v)$.

3. On suppose que v est un isomorphisme. On sait que $\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \mathrm{rg}(u)$. De plus $u = (u \circ v) \circ v^{-1}$ donc, $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}((u \circ v) \circ v^{-1}) \leq \mathrm{rg}(u \circ v)$. En combinant les deux inégalités, on obtient $\mathrm{rg}(u \circ v) = \mathrm{rg}(u)$.

1 Espaces vectoriels

2 Applications linéaires

Parties stables

3 Matrices

Proposition 17 (Définition d'une application linéaire par son action sur une base)

Soit E et F des espaces vectoriels. Soit $\mathscr{B} = (u_i)_{i \in I}$ une base de E et $(v_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F indexées par le même ensemble. Il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que pour tout $i \in I$, $f(u_i) = v_i$. Elle est donnée par

$$f(w) = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i \text{ où } w = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i.$$

Remarque : Si on suppose que E et F sont de dimension finie. On peut alors définir la matrice de l'application linéaire f. Si on note $\mathscr{C}$ une base de F, on appelle par définition matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ et on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des $v_i = f(u_i)$ dans la base $\mathscr{C}$.

L'énoncé précédent, permet d'exprimer f en connaissant sa valeur sur les droites vectorielle Δ_i où, pour tout $\in I$, $\Delta_i = \text{Vect}(u_i)$. On peut généraliser cela.

Proposition 18

Soit E et F des espaces vectoriels. Soit $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$$

Soit $u_1, \ldots, u_p \in \mathscr{L}(E_1, F) \times \cdots \times \mathscr{L}(E_p, \mathbb{K})$.
Il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad u_{|E_i} = u_i$$

Elle est définie par

L'énoncé précédent, permet d'exprimer f en connaissant sa valeur sur les droites vectorielle Δ_i où, pour tout $\in I$, $\Delta_i = \mathrm{Vect}(u_i)$. On peut généraliser cela.

Proposition 18

Soit E et F des espaces vectoriels. Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$$

Soit $u_1, \dots, u_p \in \mathscr{L}(E_1, F) \times \cdots \times \mathscr{L}(E_p, \mathbb{K})$.
Il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad u_{|E_i} = u_i$$

Elle est définie par

$$\forall w \in E, u(w) = \sum_{i=1}^{p} u_i(w_i) \text{ ou } w = \underbrace{w_1}_{\in E_1} + \cdots + \underbrace{w_p}_{\in E_p}$$

Remarque : Dans le cas où les espaces vectoriels sont de dimension finie, on peut visualiser ce résultat sur les matrices. En effet si on considère des bases $\mathscr{B}_i$ de E_i et si on note $\mathscr{B}$ la base obtenue en concaténant ces bases.

On obtient alors la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ en « collant » les matrices $A_i = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_i,\mathscr{C}}(u_i)$:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & \cdots & A_p \end{array} \right).$$

Définition 12

Soit u une application de E dans E. Soit X une partie de E elle est dite stable par u si

$$u(X) \subset X$$

Remarque : On utilisera cela souvent dans le cas où u est linéaire et X un sous-espace vectoriel mais la terminologie existe dans ce cadre plus général (par exemple intervalle stable dans l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$.)

Définition 12

Soit u une application de E dans E. Soit X une partie de E elle est dite stable par u si

$$u(X) \subset X$$

Remarque : On utilisera cela souvent dans le cas où u est linéaire et X un sous-espace vectoriel mais la terminologie existe dans ce cadre plus général (par exemple intervalle stable dans l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$.)

Définition 13

Soit u une application de E dans E. Soit X une partie stable par u de E, on considère souvent l'application induite

$$\breve{u} : \begin{array}{ccc} X & \to & X \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

ATTENTION

De manière générale, pour $u \in \mathscr{F}(E, E)$ et $X \subset E$, on peut définir $u_{|X} : X \to E$. Dans le cas où la partie est stable on peut aussi se limiter à X pour l'espace d'arrivé.
De ce fait si u est linéaire et X un sous-espace vectoriel, l'application $\breve{u}$ est un **endomorphisme** de E.

Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Montrons que H est stable par u et calculons la matrice de l'application induite par u dans H dans une base.

Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Montrons que H est stable par u et calculons la matrice de l'application induite par u dans H dans une base.

On détermine une base de H. On pose $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1)$. C'est une base de H (qui est de dimension 2).

On calcule $u(v_1)$ et $u(v_2)$ en faisant le produit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit donc que $u(v_1) = v_2$ et $u(v_2) = -v_1$. De ce fait H est stable par u et la matrice de $\tilde{u}$ dans la base (v_1, v_2) est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On reconnait un quart de tour (rotation d'angle $\pi/2$).

Recommencer avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - z = 0\}$.

Proposition 20

Soit u un endomorphisme de E (de dimension finie). Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note $\mathscr{F}$ une base de F et $\mathscr{G}$ une base de G qui est un supplémentaire de F dans E. Soit $\mathscr{B}$ la base obtenue en concaténant $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$,

$$F \text{ est stable par } u \iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \hline & & & * & \cdots & * \\ & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & * & \cdots & * \end{array}\right)$$

Démonstration : On note $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_p)$ et $\mathscr{G} = (g_{p+1}, \ldots, g_n)$.

- $\boxed{\Rightarrow}$:
  On suppose que F est stable par u. De ce fait pour $i \in [\![1, p]\!]$, $u(f_i) \in F$ donc il s'exprime comme combinaison linéaire uniquement de f_k.

Démonstration : On note $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_p)$ et $\mathscr{G} = (g_{p+1}, \dots, g_n)$.

- $\boxed{\Rightarrow}$:
  On suppose que F est stable par u. De ce fait pour $i \in [\![1, p]\!]$, $u(f_i) \in F$ donc il s'exprime comme combinaison linéaire uniquement de f_k.

- $\boxed{\Leftarrow}$: On suppose que la matrice de u est de la forme voulue. On voit donc que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $u(f_i) \in F$. De ce fait, pour tout $w \in F$, il s'écrit $w = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$ et donc $u(w) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u(f_i) \in F$. Donc F est stable par u.

1 Espaces vectoriels

2 Applications linéaires

3 Matrices

- Changement de bases

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases.

Définition 14 (Matrice de changement de bases)

On appelle matrice de changement de base de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.
On la note souvent $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. On a donc

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = Mat_{\mathscr{B}}(e'_1, \dots, e'_n)$$

Théorème 21 (Changement de bases pour les vecteurs)

Soit w un vecteur de E. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(w)$ ses coordonnées dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
On a

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases.

Définition 14 (Matrice de changement de bases)

On appelle matrice de changement de base de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.
On la note souvent $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. On a donc

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = Mat_{\mathscr{B}}(e'_1, \dots, e'_n)$$

Théorème 21 (Changement de bases pour les vecteurs)

Soit w un vecteur de E. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(w)$ ses coordonnées dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
On a

$$X = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} X'$$

Démonstration : on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ ainsi que (p_{ij}) les coefficients de P de sorte que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$$

Démonstration : on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ ainsi que (p_{ij}) les coefficients de P de sorte que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$$

On a alors

$$w = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} p_{ij} x'_j e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \right) e_i$$

Par unicité de la décomposition dans une base, on obtient que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j$$

Cela démontre que : $X = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} X'$.

ATTENTION

La matrice de changement de base de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ permet de calculer simplement les coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathscr{B}$ à partir de celles du vecteur dans la base $\mathscr{B}'$.

Théorème 23 (Changement de bases pour les applications linéaires)

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{F}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{F}'}(u)$. On a alors

$$A' =$$

où P est la matrice du changement de bases de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et Q cette de $\mathscr{F}$ à $\mathscr{F}'$.

Théorème 23 (Changement de bases pour les applications linéaires)

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{F}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{F}'}(u)$. On a alors

$$A' = Q^{-1}AP$$

où P est la matrice du changement de bases de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et Q cette de $\mathscr{F}$ à $\mathscr{F}'$.

Théorème 23 (Changement de bases pour les applications linéaires)

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{F}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{F}'}(u)$. On a alors

$$A' = Q^{-1}AP$$

où P est la matrice du changement de bases de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et Q cette de $\mathscr{F}$ à $\mathscr{F}'$.

Démonstration : On peut illustrer cette formule par le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
PX' = X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) \arrow[r, "\times A"] & APX' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(u(w)) \arrow[d, "\times Q^{-1}"] \\
X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) \arrow[u, "\times P"] \arrow[r, "\times A'"] & A'X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{F}'}(u(w)) = Q^{-1}APX'
\end{tikzcd}$$

On en déduit que $A'X' = Q^{-1}APX'$ pour toute matrice colonne X'.

De ce fait, $A' = Q^{-1}AP$.

Dans le cas où on regarde des endomorphismes et non plus des applications linéaires générales, on utilise quasi-systématiquement la même base pour l'espace de départ et d'arrivé (afin que la composition des endomorphismes corresponde au produit des matrices). On note alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ pour $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u)$.

Corollaire 24 (Cas des endomorphismes)

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$. On a alors

$$A' = P^{-1}AP$$

où P est la matrice du changement de bases de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

1 Espaces vectoriels

2 Applications linéaires

3 Matrices

Matrices semblables

Définition 15 (Matrices semblables)

Soit A et A' deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A et A' sont semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A' = P^{-1}AP.$$

Définition 15 (Matrices semblables)

Soit A et A' deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A et A' sont semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A' = P^{-1}AP.$$

ATTENTION

Ne pas confondre **semblables** et **équivalentes**.
Deux matrices sont équivalentes si elles ont le même rang, ce qui revient au fait qu'il existe $(P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$ tel que

$$A' = PAQ$$

Exemple : Donner deux matrices équivalentes qui ne sont pas semblables.

Exemple : Donner deux matrices équivalentes qui ne sont pas semblables.

Les matrices

$$A = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sont équivalentes car $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 2$ alors qu'elles ne sont pas semblables. En effet I_2 n'est semblable qu'a elle-même puisque pour toute matrice inversible $P \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$,

$$P^{-1} I_2 P = I_2$$

Proposition 26

La relation « est semblable » est une relation d'équivalence.

Démonstration : Il suffit de démontrer qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

Remarque : Soit A une matrice, l'ensemble des matrices semblables à A forment ce que l'on appelle sa classe de similitude.

Proposition 27

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}$ une base de E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.
Soit $A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, elle est semblable à A si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E telle que $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$.

Démonstration :

Proposition 27

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}$ une base de E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.
Soit $A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, elle est semblable à A si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E telle que $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$.

Démonstration :

- $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que A' est semblable à A. Il existe donc P une matrice inversible telle que $A' = P^{-1}AP$.
  La matrice $P = (p_{ij})$ peut-être vue comme une matrice de changement de base. Plus précisément, si on note $(e_1, \dots, e_n)$ les vecteurs de la base $\mathscr{B}$ et que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on pose

  $$e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$$

  alors la famille $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est une base et la matrice de changement de base de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est P puisque le vecteur e'_j sont construits de telle sorte que ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ soient la j-ième colonne de P.

On a bien alors que $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$.

On a bien alors que $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$.

- $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ telle que $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$.
  Si on pose P la matrice de changement de base de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ alors $A' = P^{-1}AP$ et donc A et A' sont semblables.

Note

Cela signifie que si u est un endomorphisme de E et si A est **une** matrice de u dans **une** base $\mathscr{B}$ de E, la classe de similitude de A est l'ensemble des matrices A' telles qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ vérifiant

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = A'$$

La suite du cours consiste à expliquer comment choisir la matrice « la plus simple ».

1 Espaces vectoriels

2 Applications linéaires

3 Matrices

Trace

Définition 16 (Trace)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux.

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Définition 16 (Trace)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*, on appelle trace de* A *et on note* $\operatorname{tr}(A)$ *la somme des coefficients diagonaux.*

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Proposition 29 (Propriétés de la trace)

1. La trace est une forme linéaire.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$
3. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

Démonstration :

1. Evident
2. Evident

3. Notons C la matrice AB et D la matrice BA. On a alors pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$C[i, j] = \sum_{k=1}^{n} A[i, k]B[k, j] \quad \text{et} \quad D[i, j] = \sum_{k=1}^{n} B[i, k]A[k, j]$$

On en déduit que

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} C[i, i] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A[i, k]B[k, i]$$

De même

$$\operatorname{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} D[i, i] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} B[i, k]A[k, i]$$

On voit bien que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

Exercice : Calculer pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(A^T A)$.

Exercice : Calculer pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(A^T A)$.

En reprenant les calculs ci-dessus en prenant $B = A^T$.

$$\mathrm{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (A^T)[i,k] A[k,i] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A[k,i] A[k,i] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A[k,i] A[k,i]^2$$

ATTENTION

La trace d'un produit n'est pas (en général) le produit des traces.

Corollaire 31

Soit A et B deux matrices semblables, $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

Démonstration : Par définition si A et B sont semblables, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On en tire que

$$\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(APP^{-1}) = \operatorname{tr}(A).$$

Exercices :

1. Trouver deux matrices A et B ayant la même trace mais n'étant pas semblables.
2. Deux matrices équivalentes ont-elles la même trace ?

Exercices :

1. Trouver deux matrices A et B ayant la même trace mais n'étant pas semblables.

Exercices :

1. Trouver deux matrices A et B ayant la même trace mais n'étant pas semblables.

   On peut prendre par exemple

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Elles sont toutes les deux de trace égale à 2 mais elles ne sont pas semblables car I_2 n'est semblable qu'à elle-même : on peut aussi voir qu'elles ne sont pas équivalentes.

Exercices :

1. Deux matrices équivalentes ont-elles la même trace ?

Exercices :

1. Deux matrices équivalentes ont-elles la même trace ?

   On peut prendre par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Elles sont équivalentes car elles sont de rang égal à 2 mais

$$\operatorname{tr}(A) = 2 \neq 4 = \operatorname{tr}(B)$$

Définition 17

Soit u un endomorphisme de E (espace vectoriel de dimension finie). Pour toute base $\mathscr{B}$ la trace de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est la même. On l'appelle la trace de u et on la note $\mathrm{tr}(u)$.

1 Espaces vectoriels

2 Applications linéaires

3 Matrices

Calcul par blocs

Théorème 32

Soit $(A_{ij})_{(i,j)\in[\![1,r]\!]\times[\![1,s]\!]}$ où $A_{ij}\in\mathscr{M}_{n_ip_j}(\mathbb{K})$ et $(B_{jk})_{(j,k)\in[\![1,s]\!]\times[\![1,t]\!]}$ où $B_{jk}\in\mathscr{M}_{p_jq_k}(\mathbb{K})$. On note

$$A=\left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{array}\right) \text{ et } B=\left(\begin{array}{c|c|c} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline B_{s1} & \cdots & B_{st} \end{array}\right)$$

Le produit AB est donné par

$$AB=\left(\begin{array}{c|c|c} \displaystyle\sum_{j=1}^{s} A_{1j}B_{j1} & \cdots & \displaystyle\sum_{j=1}^{s} A_{1j}B_{js} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline \displaystyle\sum_{j=1}^{s} A_{rj}B_{j1} & \cdots & \displaystyle\sum_{j=1}^{s} A_{rj}B_{js} \end{array}\right)$$

Théorème 32

Soit $(A_{ij})_{(i,j)\in[\![1,r]\!]\times[\![1,s]\!]}$ où $A_{ij} \in \mathscr{M}_{n_i p_j}(\mathbb{K})$ et $(B_{jk})_{(j,k)\in[\![1,s]\!]\times[\![1,t]\!]}$ où $B_{jk} \in \mathscr{M}_{p_j q_k}(\mathbb{K})$. On note

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{array}\right) \text{ et } B = \left(\begin{array}{c|c|c} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline B_{s1} & \cdots & B_{st} \end{array}\right)$$

Le produit AB est donné par

$$AB = \left(\begin{array}{c|c|c} \displaystyle\sum_{j=1}^{s} A_{1j}B_{j1} & \cdots & \displaystyle\sum_{j=1}^{s} A_{1j}B_{js} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline \displaystyle\sum_{j=1}^{s} A_{rj}B_{j1} & \cdots & \displaystyle\sum_{j=1}^{s} A_{rj}B_{js} \end{array}\right)$$

Démonstration : Il « suffit » de faire le calcul.

Si on se donne E et F des espaces vectoriels et que l'on a des décompositions en somme directes

$$E = \bigoplus_{j=1}^{s} E_j \text{ et } F = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$$

On se donne alors $\mathscr{E}_1, \dots \mathscr{E}_s$ des bases de $E_1, \dots, E_s$ et $\mathscr{F}_1, \dots \mathscr{F}_r$ des bases de $F_1, \dots, F_r$. On note $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ les bases de E et F obtenues en concaténant les bases ci-dessus. Dans ce cas pour $u \in \mathscr{L}(E, F)$, si on note

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u) = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{array}\right).$$

On peut alors considérer π_{i_0} la projection sur F_{i_0} parallèlement à $\bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \neq i_0}} F_i$. On peut alors voir A_{ij} comme la matrice (dans les bases $\mathscr{E}_i$ et $\mathscr{F}_j$) de la restriction à E_j de $\pi_i \circ u$.

Dans le cas des endomorphismes on prend la même décomposition pour l'espace de départ et d'arrivé

$$E = \bigoplus_{j=1}^{s} E_j$$

La matrice de u dans la base $\mathscr{E}$ sera dite « diagonale par blocs » si pour tout i, E_i est stable par u. Dans ce cas on obtient

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c}
A_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
0 & \ddots & & & 0 \\
\vdots & & \ddots & & \vdots \\
0 & & & \ddots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & A_{ss}
\end{array}\right).$$