Dans ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. En pratique tout restera vrai si $\mathbf{K}$ est un corps en général.

Exercice : Pouvez-vous citer quelques corps ?

1 Définitions

Définition (Espace vectoriel)

On appelle espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ ou $\mathbf{K}$-espace vectoriel un triplet $(E, +, .)$ où E est un ensemble, $+$ une loi interne de E et $.$ une loi externe :

$$+ : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array} \quad \text{et} \quad . : \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda.u \end{array}$$

Vérifiant

- *$(E, +)$ est un groupe abélien*
- *La loi . vérifie*
  - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \forall u \in E, (\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u$
  - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \forall u \in E, (\lambda \times \mu).u = \lambda.(\mu.u)$
  - $\forall u \in E, 1.u = u$

Remarque : Rappelons que le fait que $(E, +)$ soit un groupe abélien signifie que

—

—

—

—

2 Familles de vecteurs

Dans tout ce paragraphe, E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Définition (Combinaison linéaire)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On appelle combinaison linéaire des $(u_i)_{i\in I}$ tout vecteur w de la forme

$$w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$$

où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille presque nulle de scalaires ; c'est-à-dire qu'il existe un ensemble fini $J \subset I$ tel que si $i \in I \setminus J$, $\lambda_i = 0$.

Notation : On note $\mathbf{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles de scalaires presque nulle.
Remarque : Dans le cas où I est un ensemble fini (par exemple $I = [\![1\,;\, n]\!]$), la condition « presque nulle » est toujours vérifiée et on note juste

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.$$

Notation : On note $\mathsf{Vect}((u_i)_{i\in I})$ l'ensemble des combinaisons linéaires. C'est le plus petit espace vectoriel qui contient tous les éléments de la famille. C'est l'espace vectoriel engendré par la famille.
Exercice : On considère l'espace vectoriel des suites $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. On pose $u(i)$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, u(i)_n = \delta_{i,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer $\mathsf{Vect}(u(i))_{i\in\mathbf{N}}$

Exercice : Dans $\mathbf{R}^4$ on considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, 3, -2)$, $u_2 = (2, 1, 0, 0)$ et $u_3 = (1, 2, 9, -13)$. On pose $F = \mathsf{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. Déterminer la dimension de F et le décrire via un système d'équations.

Définition (Famille libre)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. Elle est libre si la famille nulle est la seule famille de scalaires presque nulle $(\lambda_I)_{i\in I}$ telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i u_i = 0$.

C'est-à-dire :

$$((u_i)_{i\in I} \text{ libre }) \iff (\forall (\lambda_i)_i \in \mathbf{K}^{(I)}, \sum_{i\in I} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0)$$

Remarque : Cela revient à demander que toute sous-famille finie est libre.

Exemples :

1. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_k = (t \mapsto \sin(t^k))$. Montrons que la famille $(u_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est libre.

2. Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes tels que $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow \deg(P_i) \neq \deg(P_j)$. Montrons que la famille est libre.

Exercice : On pose $f_a : x \mapsto e^{ax}$. Montrer que $(f_a)_{a\in\mathbf{R}}$ est libre.

Exercice : On considère les vecteurs $u_1 = (1,1,0,-1)$, $u_2 = (2,0,1,1)$, $u_3 = (-1,2,0,3)$ et $u_4 = (0,1,0,1)$. La famille (u_1,u_2,u_3,u_4) est-elle libre ?

Définition (Famille Génératrice)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On dit qu'elle engendre E si $E = \mathsf{Vect}((u_i)_{i\in I})$ c'est-à-dire que tous les vecteurs de E sont des combinaisons linéaires de vecteurs de la famille.

ATTENTION

La notion de famille libre est intrinsèque à la famille, c'est-à-dire que si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille d'un sous-espace vectoriel F, on peut travailler dans E ou dans F pour montrer que la famille est libre. Par contre, la notion de famille génératrice ne l'est pas. Une famille peut engendrer F sans engendrer E.

Exemple : La famile $(X^i)_{i\in\mathbf{N}}$ engendre $\mathbf{K}[X]$.

Définition

Une famille de vecteurs $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E si c'est une famille libre et génératrice de E.

Théorème

Soit $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E. Pour tout vecteur w il existe une unique famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ telle que

$$w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$$

Remarque : Le fait que la famille est génératrice implique qu'il existe (au moins une) famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ telle que $w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$. Le fait qu'elle soit libre implique qu'il existe au plus une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ telle que $w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$. En effet s'il y en a deux distinctes en faisant la différence on trouve une famille encore presque nulle $(\mu_i)_{i\in I}$ telle que $\sum_{i\in I} \mu_i u_i = 0$.

Définition

Soit $\mathscr{B} = (u_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour tout vecteur w, l'unique famille presque nulle $(\lambda_i) \in \mathbf{K}^{(I)}$ telle que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i u_i = w$$

s'appelle les coordonnées de w dans la base $\mathscr{B}$.

Remarque : Il a été vu en première année que tout espace vectoriel de dimension finie admettait un base. Il est possible de démontrer que tout espace vectoriel admet des bases (hors programme) cependant dans certains cas on ne peut pas en exhiber. Par exemple $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Exercice : Soit $u_1 = (2, 0, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 1)$, $u_3 = (1, 3, 5)$ et $u_4 = (1, 2, 3)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) engendre $\mathbf{R}^3$ et en extraire une base.

ATTENTION

Quand on travaille dans l'espace vectoriel $\mathbf{K}^n$, les vecteurs sont des n-uplets.

$$u = (x_1, \dots, x_n)$$

où $x_1, \dots, x_n$ sont les **composantes** du vecteurs.
Il y a une base dite canonique $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ où pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$,

$$e_i = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0, \dots, 0)$$

Les **coordonnées** du vecteur u dans cette base sont $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ car

$$u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Définition (Rang)

Soit $\mathscr{F} = (u_i)_{i \in I}$. On appelle rang de la famille $\mathscr{F}$ et on note $\operatorname{rg}(\mathscr{F})$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par la famille quand il est de dimension finie.

Proposition

Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.

1. Si E est de dimension finie n. Alors $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) \leqslant n$.
2. Si $\mathscr{F}$ est de cardinal n. Alors $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) \leqslant n$.

ATTENTION

Ne pas mélanger les notions de rang, cardinal et dimension :

— On peut parler du rang ou du cardinal d'une famille mais pas de sa dimension.

— On peut parler de la dimension (et du cardinal) d'un sous-espace vectoriel mais pas de son rang.

Proposition

Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E

1. On a $(\operatorname{rg}(\mathscr{F}) = \dim(E)) \iff$ (La famille $\mathscr{F}$ engendre E).
2. On a $(\operatorname{rg}(\mathscr{F}) = \#\mathscr{F}) \iff$ (La famille $\mathscr{F}$ est libre).
3. On a $(\operatorname{rg}(\mathscr{F}) = \#\mathscr{F} = \dim E) \iff$ (La famille $\mathscr{F}$ est une base de E).

3 Somme

Définition

Soit $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels, on appelle somme de $F_1, F_2, \ldots, F_n$ et on note $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i$ le plus petit sous-espace vectoriel contenant $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$. On a

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \{u_1 + \cdots + u_n \mid (u_1, \ldots, u_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n\}$$

ATTENTION

Ne pas confondre l'union $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ et la somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$. Dans la majorité des cas, une union de sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exemple : Dans $E = \mathbf{R}^2$. On pose $F_1 = \mathsf{Vect}(u_1)$ et $F_2 = \mathsf{Vect}(u_2)$ où $u_1 = (1, -1)$ et $u_2 = (2, 1)$.

Le vecteur $w = (3, 0) = u_1 + u_2 \in F_1 + F_2$ mais $w \notin F_1 \cup F_2$.

Exemple : Dans $E = \mathbf{R}^3$, on note $F_1 = \mathsf{Vect}(u_1)$ et $F_2 = \mathsf{Vect}(u_2)$ où $u_1 = (1, -1, 0)$ et $u_2 = (1, -2, 1)$. Alors $F_1 + F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

Proposition

Soit $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels et $\mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_n$ des familles qui engendrent ces espaces alors la concaténée des familles engendre $\sum_{i=1}^{n} F_i$.

Démonstration : Ce résultat reste vrai dans le cas général mais nous ne l'utiliserons que dans le cadre d'espaces vectoriels de dimension finie. Pour alléger les notations nous ferons la démonstration uniquement dans ce cadre.

On note pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathscr{F}_i = (u_{i,1}, \dots, u_{i,p_i})$

□

Définition (Somme directe)

Soit $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels. On dit qu'ils sont en somme directe si

$$\forall (u_1, \dots u_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, u_1 + \cdots + u_n = 0 \Rightarrow u_1 = \cdots = u_n = 0$$

Dans ce cas on note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ la somme.

Remarque : Cela revient à dire que tout vecteur w de la somme se décompose de manière unique comme une somme $w = u_1 + \cdots + u_n$ où $u_i \in F_i$.

ATTENTION

Dans le cas de deux espaces vectoriels il y a une caractérisation plus simple :

F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si

Cette caractérisation ne s'entend pas à plus de trois espaces vectoriels

ATTENTION

Des espaces peuvent être deux à deux en somme directe sans être en somme directe.

Exercice : Montrer que $F_1, \cdots, F_n$ sont en somme directe si et seulement si pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, F_i est en somme directe avec $\displaystyle\sum_{j \neq i} F_j$.

Proposition

Soit $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels en somme directe.
Pour tout i on considère une base $\mathscr{B}_i$ de F_i. La famille $\mathscr{B}$ obtenue en concaténant les familles $\mathscr{B}_i$ est une base de $F = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Démonstration : Ce résultat reste vrai dans le cas général mais nous ne l'utiliserons que dans le cadre d'espaces vectoriels de dimension finie. Pour alléger les notations nous ferons la démonstration uniquement dans ce cadre.

On note pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathscr{B}_i = (u_{i,1}, \dots, u_{i,p_i})$ et $\mathscr{B}$ la famille obtenue en concaténant les familles $\mathscr{B}_i$.

- On a déjà vu que $\mathscr{B}$ était une famille génératrice de F
- Montrons que la famille $\mathscr{B}$ est libre. Soit $(\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \dots, \lambda_{1,p_1}, \lambda_{2,1}, \dots, \lambda_{n,p_n})$ une famille de scalaires. On suppose que
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \lambda_{i,j} u_{ij} = 0$$
Cela implique que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 0$ où, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $w_i = \sum_{j=1}^{p_i} \lambda_{i,j} u_{ij} \in F_i$. Comme la somme est directe, cela implique que pour tout entier i, $w_i = 0$. En utilisant alors que les familles $\mathscr{B}_i$ sont libres, on obtient que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et tout $j \in \{1, \dots, p_i\}$, $\lambda_{i,j} = 0$.

Finalement, la famille $\mathscr{B}$ est bien une base de F. $\square$

Remarque : A l'inverse, si on se donne une base $(u_i)_{i\in I}$ de E, que l'on partitionne I en $I_1, \ldots, I_p$ et l'on note $F_k = \mathsf{Vect}(u_i)_{i\in I_k}$ pour $k \in [\![1\,;\,p]\!]$ alors

$$F_1 \oplus \cdots \oplus F_p = E$$

Proposition (Formule de Grassman)

1. On a $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$
2. On a $(\dim(F_1 + \cdots + F_n) = \dim F_1 + \cdots + \dim F_n) \iff$ (la somme de $F_1, \ldots, F_n$ est directe).