Séries

Exercice 1

Donner la nature des séries de terme général :

1) $1-\sin\left(\dfrac{n\pi+1}{2n}\right)$

2) $\dfrac{1}{1+\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{n}\right)}$

Exercice 2

Fixons $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ notons p_n le nombre de chiffres en base 10 de n, et posons $u_n = \dfrac{1}{a^{p_n}}$.

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque. Donner l'ensemble des $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $p_n = k$. En déduire un encadrement de p_n en fonction de $\log_{10}(n)$.
2) En encadrant a^{p_n}, donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la série de terme général u_n converge. Par la suite on supposera cette condition vérifiée.
3) Calculer $v_k = \displaystyle\sum_{n=10^k}^{10^{k+1}-1} u_n$.

   Montrer que la série de terme général v_n converge vers la même limite que la série de terme général u_n.
4) En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Problème : Les polynômes de Tchebychev de seconde espèce

Dans ce problème, n est un entier naturel et E désigne l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose : $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} P(t)Q(t)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Démontrer que $(.|.)$ munit E d'une structure d'espace vectoriel euclidien.

2) Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose : $I_p = \displaystyle\int_{-1}^{+1} t^p\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

   a) Calculer I_p pour p impair.

   b) Calculer I_0 et I_2. On admet que : $I_4 = \dfrac{\pi}{16}$.

   c) Pour $n = 2$, en appliquant la méthode d'orthonormalisation de Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2)$, déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

3) On considère l'application $T : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & T(P) = (1-X^2)P'' - 3XP' \end{array}\right.$.

   a) Démontrer que T est bien définie et est un endomorphisme de E.

   b) Pour $x \in [-1, +1]$, on pose : $F(x) = (1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)$.
   Vérifier que : $\forall x \in [-1, +1]$, $F'(x) = \sqrt{1-x^2}\,T(P)(x)$.

   c) En déduire, en intégrant par parties, que : $\forall (P, Q) \in E^2$, $(T(P)|Q) = (P|T(Q))$.

4) a) Déterminer la matrice M de l'endomorphisme T dans la base canonique de E.

   b) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant de la matrice $M - \lambda I_{n+1}$.
   Préciser les valeurs de λ pour lesquelles cette matrice n'est pas inversible.

   c) Soit $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $\lambda_k = -k(k+2)$.
   Déterminer avec précision le rang de de la matrice $M - \lambda_k I_{n+1}$ et en déduire la dimension du noyau de $T - \lambda_k\,\mathrm{id}_E$.

   d) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on admet qu'il existe un unique polynôme U_k de E tel que :
   $T(U_k) = \lambda_k U_k$ et $U_k(1) = k + 1$.
   En examinant son coefficient dominant, déterminer le degré du polynôme U_k.

   e) En utilisant la question (3,c), démontrer que $(U_0, U_1, \ldots, U_n)$ est une base orthogonale de E.

5) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On considère l'équation différentielle (E_k) : $y'' + (k+1)^2 y = 0$.

   a) Résoudre (E_k).

   b) On pose : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) = U_k(\cos\theta)\sin\theta$.
   Démontrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_k).

   c) En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) = a\sin(k+1)\theta$.

   d) Démontrer que : $\forall \theta \in \,]0, \pi[$, $U_k(\cos\theta) = \dfrac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$.

   e) Déterminer U_0, U_1 et U_2. Vérifier le résultat de la question (2,c).

Les polynômes U_k $(k \in \mathbb{N})$ sont les polynômes de Tchebychev de seconde espèce.