Exercice 1

Dans chacun des cas nous allons essayer de déterminer un équivalent du terme général.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit $u_n = 1 - \sin\left(\frac{n\pi+1}{2n}\right) = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2n}\right) = 1 - \cos\left(\frac{1}{2n}\right)$
   Utilisons $1 - \cos(t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t^2}{2}$, il vient $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{8n^2}$.
   Or $\frac{1}{8n^2}$ est <u>de signe constant</u> et $\sum \frac{1}{8n^2}$ converge donc $\sum u_n$ est une série convergente.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ posons $v_n = \dfrac{1}{1 + \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n}\right)}$ et cherchons–en un équivalent :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{1 + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}} \\ &= \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\sin(\frac{1}{n}) + \cos(\frac{1}{n})} \quad \text{(le dénominateur tend vers 1)} \\ &\underset{n \to +\infty}{\sim} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

   Or $\frac{1}{n}$ est <u>de signe constant</u> et $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum u_n$ est une série divergente.

Exercice 2

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $p_n = k \iff 10^{k-1} \leqslant n < 10^k \iff k - 1 \leqslant \log_{10}(n) < k$, ce qui donne $p_n - 1 = E(\log_{10}(n))$ ou encore $p_n = E(\log_{10}(n)) + 1$.

2) Considérons différents cas par rapport à a.

   1^e cas : $a = 0$

   alors le terme général de la série n'est pas défini : pas de question à se poser.

   2^e cas : $a > 0$

   1^e sous–cas : $0 < a < 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < a^{p_n} \leqslant 1$ donc $\dfrac{1}{a^{p_n}} \geqslant 1$: la série diverge grossièrement.

   Désormais dans le 2^e cas nous supposerons que $a > 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{a^{p_n}} = \exp(-p_n \ln(a))$ or $\ln(a) > 0$ et $p_n = E(\log_{10}(n)) + 1$ ce qui donne encore $\log_{10}(n) < p_n \leqslant \log_{10}(n) + 1$ donc $-(\frac{\ln n}{\ln 10} + 1)\ln(a) \leqslant -p_n \ln(a) < -\frac{\ln n}{\ln 10}\ln a$.

On obtient donc l'encadrement $\exp(-\frac{(\ln(n)+\ln(10))\ln(a)}{\ln(10)}) < \dfrac{1}{a^{p_n}} \leqslant \exp(-\frac{\ln(n)\ln(a)}{\ln(10)})$ ou encore :

$$\frac{1}{a} \times \frac{1}{n^{\log_{10}(a)}} < \frac{1}{a^{p_n}} \leqslant \frac{1}{n^{\log_{10}(a)}}$$

Dans le cas où $a > 10$, $\log_{10}(a) > 1$ donc $\sum \dfrac{1}{n^{\log_{10}(a)}}$ est une série de Riemann convergente. Or $0 < \dfrac{1}{a^{p_n}} \leqslant \dfrac{1}{n^{\log_{10}(a)}}$ donc $\sum \dfrac{1}{a^{p_n}}$ est convergente.

Dans le cas où $1 < a \leqslant 10$, $a > 10$, $\log_{10}(a) \leqslant 1$ donc $\sum \dfrac{1}{n^{\log_{10}(a)}}$ est une série de Riemann divergente. Or $0 < \dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{n^{\log_{10}(a)}} \leqslant \dfrac{1}{a^{p_n}}$ donc $\sum \dfrac{1}{a^{p_n}}$ est divergente.

3^e cas : $a < 0$

Remarquons que $\dfrac{1}{a^{p_n}}$ est quand même défini car $p_n \in \mathbb{N}^*$, mais la formule $\dfrac{1}{a^{p_n}} = \exp(-p_n \ln(a))$ n'a plus de sens : il faut utiliser $\dfrac{1}{a^{p_n}} = signe(p_n)|a^{p_n}| = (-1)^{p_n}.\exp(-p_n \ln|a|) = \dfrac{(-1)^{p_n}}{|a|^{p_n}}$

Dans le cas òù $-1 \leqslant a < 0$ on a $\left|\dfrac{1}{a^{p_n}}\right| = \dfrac{1}{|a|^{p_n}} \geqslant 1$ donc $\sum \dfrac{1}{a^{p_n}}$ diverge grossièrement.

Dans le cas où $a < -10$ on a $|a| > 10$ et en utilisant $\left|\dfrac{1}{a^{p_n}}\right| = \dfrac{1}{|a|^{p_n}}$ ainsi que le 2^e cas, $\sum \dfrac{1}{a^{p_n}}$ est absolument convergente donc convergente.

Il reste le cas où $-10 \leqslant a < -1$: nous savons que $\sum \dfrac{1}{a^{p_n}}$ n'est pas absolument convergente, mais cela ne permet pas de conclure. Ce cas est le plus difficile : on trouvera en complément du corrigé de cet exercice l'étude de ce cas.

3) Pour tout n tel que $10^k \leqslant n < 10^{k+1}$ on a $p_n = k + 1$ donc $u_n = \dfrac{1}{a^{k+1}}$ qui est constant pas rapport à n : donc $v_k = \displaystyle\sum_{n=10^k}^{10^{k+1}-1} u_n = (10^{k+1} - 10^k)\frac{1}{a^{k+1}} = \frac{9}{a}\left(\frac{10}{a}\right)^k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ posons $U_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i$ la somme partielle d'ordre n de $\sum u_n$, et $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ la somme partielle d'ordre n de $\sum v_n$.

Constatons que $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=10^k}^{10^{k+1}-1} u_i = \sum_{i=1}^{10^{n+1}-1} u_i = U_{10^{n+1}-1}$. Or la suite U converge (par hypothèse) donc la suite V converge vers la même limite en tant que suite extraite, donc $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même limite.

4) Vu le résultat de la question précédente il suffit de calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k$. Or $v_k = \dfrac{9}{a}\left(\dfrac{10}{a}\right)^k$: on reconnaît une série géométrique. Il y a convergence si et seulement si $\left|\dfrac{10}{a}\right| < 1$, c'est–à–dire si et seulement si $a \in]-\infty, -10[\cup]10, +\infty[$, et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k = \dfrac{9}{a}\dfrac{1}{1-\frac{10}{a}} = \dfrac{9}{a-10}$.

Complément : étude du cas où $-10 \leqslant a < -1$. En reprenant les notations de la question 3), la suite V est toujours extraite de la suite U. Or la suite V est une série géométrique divergente, donc la suite U ne peut pas converger.

En conclusion $\sum u_n$ converge si et seulement si $a \in]-\infty, -10[\cup]10, +\infty[$.

Problème : Les polynômes de Tchebychev de seconde espèce

1) Linéarité à gauche : soient $P_1, P_2, Q \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda P_1 + P_2|Q) = \int_{-1}^{+1}(\lambda P_1(t) + P_2(t))Q(t)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \lambda \int_{-1}^{1} P_1(t)Q(t)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} P_2(t)Q(t)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \lambda(P_1|Q)+(P_2|Q)$.

Symétrie : soient $P, Q \in E$, alors $(Q|P) = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t = (P|Q)$.

$(.|.)$ est linéaire à gauche et symétrique donc bilinéaire.

Positivité : soit $P \in E$, alors $(P|P) = \int_{-1}^{1} \underbrace{P^2(t)\sqrt{1-t^2}}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Par ailleurs, si $(P|P) = 0$, puisque $t \mapsto P^2(t)\sqrt{1-t^2}$ est de signe constant sur $[-1,1]$ et continue, on obtient $\forall t \in [-1,1], P^2(t)\sqrt{1-t^2} = 0$ donc $\forall t \in]-1,1[, P(t) = 0$ donc le polynôme P possède une infinié de racines donc il est nul : ainsi $(.|.)$ est définie positive.

Nous venons de montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur E. Enfin, E est de dimension finie donc c'est un espace euclidien.

2) a) Effectuons le changement de variable $u = -t$ (donc $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$) : $I_p = \int_{t=-1}^{t=1} t^p\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \int_{u=1}^{u=-1}(-u)^p\sqrt{1-(-u)^2}(-\mathrm{d}u) = \int_{-1}^{1}(-1)^p u^p\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u = -I_p$. L'égalité $I_p = -I_p$ permet d'obtenir $I_p = 0$.

b) Calcul de I_0 : posons $t = \sin(u)$, ainsi $I_0 = \int_{t=-1}^{t=1}\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \int_{u=-\pi/2}^{u=\pi/2}\sqrt{1-\sin^2(u)}\cos(u)\mathrm{d}u$. Or $\sqrt{1-\sin^2(u)} = |\cos(u)| = \cos(u)$ (car sur $[-\pi/2, \pi/2]$, cos est positive) donc $I_0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(u)\mathrm{d}u$.

Il n'y a plus qu'à linéariser en utilisant $\cos^2(u) = \dfrac{1}{2}(1+\cos(2u))$: on obtient $I_0 = \dfrac{1}{2}\left[u + \dfrac{1}{2}\sin(2u)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$ donc $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Calcul de I_2 : en appliquant le même changement de variable $t = \sin(u)$ on obtient $I_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2(u)\cos^2(u)\mathrm{d}u$.

Linéarisons : $\sin^2(u)\cos^2(u) = \left(\dfrac{1}{2}\sin(2u)\right)^2 = \dfrac{1}{8}(1-\cos(4u))$.

Ainsi $I_2 = \dfrac{1}{8}\left[u - \dfrac{1}{4}\sin(4u)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \dfrac{\pi}{8}$.

c) Pour tout $i \in [\![0,2]\!]$ posons $e_i = X^i$. Rappelons le procédé d'orthonormalisation de Schmidt :

Pour $i = 0$ à 2 (inclus)
  Pour $j = 0$ à $i-1$ (inclus)
    $e_i \leftarrow e_i - (e_i|e_j)e_j$
  $e_i \leftarrow \dfrac{1}{\sqrt{(e_i|e_i)}}e_i$

Traçons à la main l'exécution de ce programme :

$e_0 \leftarrow \dfrac{1}{\sqrt{(e_0|e_0)}}e_0 = \dfrac{1}{\sqrt{I_0}}e_0 = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$

$e_1 \leftarrow e_1 - (e_0|e_1)e_0 = X - \dfrac{2}{\pi}I_1 = X$

$e_1 \leftarrow \dfrac{1}{\sqrt{(e_1|e_1)}}e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{I_2}}e_1 = \sqrt{\dfrac{8}{\pi}}X$

$e_2 \leftarrow e_2 - (e_0|e_2)e_0 - (e_1|e_2)e_1 = X^2 - \dfrac{2}{\pi}I_2 - \dfrac{8}{\pi}I_3X = X^2 - \dfrac{1}{4}$

$e_2 \leftarrow \dfrac{1}{\sqrt{(e_2|e_2)}}e_2 = \sqrt{\dfrac{32}{\pi}}X^2 - \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$

Ainsi l'orthonormalisé de $(1, X, X^2)$ par la méthode de Schmidt est :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}X, \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}X^2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)$$

3) a) Il est immédiat que pour tout $P \in E$, $(1-X^2)P'' - 3XP'$ est un polynôme. De plus $\deg(P'') \leqslant n-2$ et $\deg(P') \leqslant n-1$ (avec la convention que si P' ou P'' est nul, alors $-\infty \leqslant n-2 \leqslant n-1$). Donc $\deg((1-X^2)P'' - 3XP') \leqslant \max(2+n-2, 1+n-1) = n$ donc $(1-X^2)P'' - 3XP' \in E$. Ainsi $T : E \to E$ est bien définie.

Vérifions la linéarité : soient $P, Q \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $T(\lambda P + Q) = (1-X^2)(\lambda P + Q)'' - 3X(\lambda P + Q)' = \lambda((1-X^2)P'' - 3XP') + ((1-X^2)Q'' - 3XQ') = \lambda T(P) + T(Q)$. Donc $T \in L(E)$.

b) On peut utiliser le fait que $t \mapsto t^{3/2}$ est dérivable même en 0 de dérivée $t \mapsto \dfrac{3}{2}t^{1/2}$ car $\lim\limits_{t\to 0} \underbrace{\dfrac{t^{3/2} - 0^{3/2}}{t-0}}_{=t^{1/2}} = 0 = \dfrac{3}{2}0^{1/2}$.

Soit $x \in [-1,1]$, alors :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{3}{2}(-2x)(1-x^2)^{1/2}P'(x) + (1-x^2)^{3/2}P''(x) \\ &= (1-x^2)^{1/2}\left(-3xP'(x) + (1-x^2)P''(x)\right) \\ &= \sqrt{1-x^2}\,T(P)(x) \end{aligned}$$

c) Soient $P, Q \in E$.

$$\begin{aligned}
(T(P)|Q) &= \int_{-1}^{1} \underbrace{T(P)(t)\sqrt{1-t^2}}_{=F'(t)} Q(t)\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{[F(t)Q(t)]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} F(t)Q'(t)\mathrm{d}t \\
&= -\int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)(1-t^2)^{3/2}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Dans cette dernière expression P et Q sont interchangeables, donc $(T(P)|Q) = (T(Q)|P) = (P|T(Q))$.

4) a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On obtient $(X^k)' = kX^{k-1}$ même si $k = 0$ car dans ce cas ça vaut 0 (en toute rigueur X^{k-1} n'est pas un polynôme si $k = 0$). Similairement on notera $(X^k)'' = k(k-1)X^{k-2}$ même si $k = 0$ ou 1.
$T(X^k) = (1-X^2)k(k-1)X^{k-2} - 3XkX^{k-1} = (-k^2-2k)X^k + k(k-1)X^{k-2}$.
En notant $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E on obtient :

$$M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -n^2-2n \end{pmatrix}$$

b) $M - \lambda I_{n+1}$ est une matrice triangulaire donc son déterminant est le produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(M - \lambda I_{n+1}) = \prod_{k=0}^{n}(-\lambda - k^2 - 2k)$$

$M - \lambda I_{n+1}$ n'est pas inversible si et seulement si son déterminant est nul si et seulement si $\exists k \in [\![0, n]\!], \lambda = -k^2 - 2k$.

c) Constatons que M est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$. Ainsi $M - \lambda_k I_{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda_0 - \lambda_k & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n - \lambda_k \end{pmatrix}$ (le 0 sur la diagonale se trouvant à la k–ième colonne si on indexe les colonnes à partir de 0).

Ainsi $M - \lambda_k I_{n+1}$ est une matrice triangulaire avec un 0 sur la diagonale donc elle n'est pas inversible. Donc $\mathrm{rg}(M - \lambda_k I_{n+1}) \leqslant n$.

Par ailleurs constatons que $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_k > \dots > \lambda_n$ donc pour tout $i \in [\![0, n]\!] \setminus \{k\}, \lambda_i - \lambda_k \neq 0$. Ainsi, si on considère la matrice extraite en retirant la ligne d'indice k et la colonne d'indice k (en indexant les lignes et les colonnes à partir de 0) on obtient une matrice de taille n et inversible (car triangulaire sans 0 sur la diagonale). Donc $\operatorname{rg}(M - \lambda_k I_{n+1}) \geqslant n$.

Par double inégalite, $\operatorname{rg}(M-\lambda_k I_{n+1}) = n$. Donc d'après le théorème du rang, $\dim(\ker(M-\lambda_k I_{n+1})) = 1 = \dim(\ker(T - \lambda_k \operatorname{id}_E))$.

d) Notons $d = \deg(U_k)$. Puisque $U_k \in E$ et $U_k(1) \neq 0$, $d \in [\![0, n]\!]$. Soient $c_0, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ tels que $U_k = \sum\limits_{i=0}^{d} c_i X^i$ (et donc $c_d \neq 0$).

Alors $T(U_k) = \sum\limits_{i=0}^{d} c_i T(X^i) = \sum\limits_{i=0}^{d} c_i \Big((-i^2 - 2i)X^i + i(i-1)X^{i-2} \Big)$.

Le coefficient de degré d de $T(U_k)$ est donc $c_d(-d^2 - 2d) = \lambda_d c_d$ (car tous les autres termes sont de degré strictement inférieur). Par ailleurs $T(U_k) = \lambda_k U_k = \sum\limits_{i=0}^{d} c_i \lambda_k X^i$ donc le coefficient de degré d est $\lambda_k c_d$. Donc $\lambda_d c_d = \lambda_k c_d$ or $c_d \neq 0$ donc $\lambda_k = \lambda_d$. Or nous avons vu que $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ sont 2 à 2 distincts (car $i \mapsto \lambda_i$ est strictement décroissante) donc $k = d$. Or arrive à la conclusion $\deg(U_k) = k$.

e) Soient $i, j \in [\![0, n]\!]$ tels que $i \neq j$ (donc $\lambda_i \neq \lambda_j$). D'après le résultat de 3c), $(T(U_i)|U_j) = (U_i|T(U_j))$. Or $T(U_i) = \lambda_i U_i$ et $T(U_j) = \lambda_j U_j$ donc $\lambda_i (U_i|U_j) = \lambda_j (U_i|U_j)$ donc $(\lambda_i - \lambda_j)(U_i|U_j) = 0$. Puisque $\lambda_i \neq \lambda_j$ il vient $(U_i|U_j) = 0$ donc $(U_0, \dots, U_n)$ est une famille orthogonale.

Par ailleurs, les polynômes $U_0, \dots, U_n$ sont tous non nuls (car $\forall k \in [\![0, n]\!], U_k(1) = k+1$). Donc la famille orthogonale $(U_0, \dots, U_n)$ est une famille libre. Enfin, sa longueur est $n + 1 = \dim(E)$ donc $(U_0, \dots, U_n)$ est une base orthogonale de E.

5) a) Il s'agit d'une équation différentielle du type $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega \in \mathbb{R}^*$ (équation d'un oscillateur libre non amorti). La solution générale est $y : x \mapsto A\cos((k+1)x) + B\sin((k+1)x)$ où A et B sont des constantes réelles (si on cherche les solutions à valeurs réelles).

b) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$f'(\theta) = -\sin^2(\theta)U_k'(\cos(\theta)) + U_k(\cos(\theta))\cos(\theta)$

$f''(\theta) = -3\sin(\theta)\cos(\theta)U_k'(\cos(\theta)) + \sin^3(\theta)U_k''(\cos(\theta)) - \sin(\theta)U_k(\cos(\theta))$

$= \sin(\theta)\Big[(1 - \cos^2(\theta))U_k''(\cos(\theta)) - 3\cos(\theta)U_k'(\cos(\theta)) - U_k(\cos(\theta))\Big]$

Par ailleurs on sait que $T(U_k) = \lambda_k U_k$ donc en évaluant cette égalité polynomiale en $\cos(\theta))$ il vient $(1 - \cos^2(\theta))U_k''(\cos(\theta)) - 3\cos(\theta)U_k'(\cos(\theta)) = \lambda_k U_k(\cos(\theta))$. Donc $f''(\theta) = \sin(\theta)(\lambda_k - 1)U_k(\cos(\theta))$.

Donc $f''(\theta) + (k+1)^2 f(\theta) = \sin(\theta)\big(\underbrace{\lambda_k - 1 + (k+1)^2}_{=0}\big)U_k(\cos(\theta)) = 0$

Nous avons bien montré que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_k).

c) D'après le résultat de la question 5a, il existe deux réels a et b tels que $\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = a\sin((k+1)\theta) + b\cos((k+1)\theta)$. Or $f(0) = 0$ d'après la définit de f) donc $b = 0$.

d) Soit $\theta \in]0, \pi[$. Nous savons que $\sin(\theta)U_k(\cos(\theta)) = a\sin((k+1)\theta)$ donc $U_k(\cos(\theta)) = \dfrac{a\sin((k+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

Or $U_k(1) = k+1 = U_k(\cos(0))$. Puisque $U_k \circ \cos$ est continue (en tant que composée de fonctions continues) il vient $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{a \sin((k+1)\theta)}{\sin(\theta)} = k+1$.

Or $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{\sin((k+1)\theta)}{\sin(\theta)} = k+1$ (grâce à l'équivalent $\sin(u) \underset{u \to 0}{\sim} u$) donc $a = 1$: on obtient bien $\forall \theta \in \left]0, \pi\right[\ ,\ U_k(\cos\theta) = \dfrac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$.

e) Soit $k \in [\![0, 2]\!]$. Pour déterminer U_k il suffit de déterminer un polynôme V_k tel que $\forall \theta \in \left]0, \pi\right[\ ,\ V_k(\cos\theta) = \dfrac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$. En effet, si on trouve un tel polynôme V_k, alors $\forall \theta \in]0, \pi[, U_k(\cos(\theta)) = V_k(\cos(\theta))$ donc $\forall x \in]-1, 1[, (U_k - V_k)(x) = 0$ donc $U_k - V_k$ possède une infinité de racines donc $U_k = V_k$.

Pour $k = 0$: on constate que pour tout $\theta \in]0, \pi[, \dfrac{\sin(0+1)\theta}{\sin\theta} = 1$ donc si on pose $V_0 = 1$, on a bien $\dfrac{\sin(0+1)\theta}{\sin\theta} = V_0(\cos(\theta))$. D'après la remarque précédente, $U_0 = 1$.

Pour $k = 1$: on constate que pour tout $\theta \in]0, \pi[, \dfrac{\sin(1+1)\theta}{\sin\theta} = \dfrac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = 2\cos(\theta)$. Donc si on pose $V_1 = 2X$, on a bien $\dfrac{\sin(1+1)\theta}{\sin\theta} = V_1(\cos(\theta))$. D'après la remarque précédente, $U_1 = 2X$.

Pour $k = 2$: on constate que pour tout $\theta \in]0, \pi[$,
$\dfrac{\sin(2+1)\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin(2\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(2\theta)}{\sin(\theta)} = \dfrac{2\sin(\theta)\cos^2(\theta) + \sin(\theta)\big(2\cos^2(\theta) - 1\big)}{\sin(\theta)} = 4\cos^2(\theta) - 1$. Donc si on pose $V_2 = 4X^2 - 1$, on a bien $\dfrac{\sin(2+1)\theta}{\sin\theta} = V_2(\cos(\theta))$. D'après la remarque précédente, $U_2 = 4X^2 - 1$.