Équivalents et développements limités

1. Equivalents

Définition

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose qu'elles ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

1. *On dit que (u_n) et (v_n) sont équivalentes et on note $(u_n) \sim (v_n)$ si $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$.*
2. *On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) et on note $(u_n) = o(v_n)$ si $\dfrac{u_n}{v_n} \to 0$.*
3. *On dit que (u_n) est dominée par (v_n) et on note $(u_n) = O(v_n)$ si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.*

Proposition (Propriétés de la relation d'équivalence)

1. La relation d'équivalence est une relation d'équivalence : symétrie, réflexivité, transitivité
2. Si $u_n \sim v_n$, les suites (u_n) et (v_n) sont de même signe à partir d'un certain rang.
3. Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$ et $\dfrac{u_n}{u'_n} \sim \dfrac{v_n}{v'_n}$
4. Si $u_n \sim v_n$ et α est un réel **fixé** alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$
5. Si $v_n = o(u_n)$ alors $u_n + v_n \sim u_n$

ATTENTION

— On ne peut pas ajouter des équivalents sans réflechir ! Par exemple $n^2 + n \sim n^2$ et $-n^2 + 1 \sim -n^2$ mais $n + 1 = (n^2 + n) + (-n^2 + 1) \nsim 0$

— On ne peut pas composer (à gauche) des équivalents. Par exemple $n^2 \sim n^2 + n$ mais $f(n^2 + n)$ n'est pas nécessairement équivalent à $f(n^2)$ par exemple si $f : x \mapsto e^x$.

2. Equivalents et somme

On peut gérer les sommes d'équivalents en faisant attention

— Un terme est négligeable devant l'autre :
On cherche un équivalent à $\sin(1/n) + \cos(1/n) - 1$.

— Les deux termes sont du « même ordre » mais ne se compensent pas :
On cherche un équivalent à $\dfrac{\sin(1/n)}{n} + \cos(1/n) - 1$.

— Les deux termes sont du « même ordre » et se compensent :
On cherche un équivalent à $\dfrac{\sin(1/n)}{2n} + \cos(1/n) - 1$.

3. Développements limités

Définition

Soit I un intervalle et a un point intérieur à I. Soit $n \in \mathbf{N}$ et f une fonction définie sur I. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a s'il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1.(x-a) + \cdots + a_n.(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

En particulier pour $a = 0$, f admet un développement limité à l'ordre n en 0 s'il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1.x + \cdots + a_n.x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right).$$

Proposition (Développements limités usuels en 0)

- La fonction $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Elle admet des développement à tout ordre en 0 et, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

- Les fonctions $x \mapsto \operatorname{ch} x$ et $x \mapsto \operatorname{sh} x$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Elles admettent des développements à tout ordre en 0 et, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1}).$$

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Elles admettent des développements à tout ordre en 0 et, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1}).$$

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

- La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$. Elle admet des développements à tout ordre en 0 et, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\forall x > -1, \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

- Soit $\alpha \in \mathbf{R}$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$. Elle admet des développements à tout ordre en 0 et, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\forall x > -1, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + o(x^n).$$

  En particulier, $\forall x > -1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\ \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \\ (1+x)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2) \end{aligned}$$

- Les développements limités de arctan, arccos et arcsin en 0 s'obtiennent par intégration du développement de leur dérivée.

3. Exercices équivalents

Déterminer des équivalents simples des termes suivants quand n tend vers $+\infty$

1. $\dfrac{3n+\ln(n)}{3^n+2^n}$
2. $n\sin\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)$
3. $\sqrt{n^2-n+1}-n$
4. $\ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\right)$
5. $\cos(1/n)-\dfrac{n+1}{n}$
6. $\exp(n+n^2)$
7. $\dfrac{n!+n\cos(n)}{n+n\ln n}$
8. $\tan\left(\dfrac{n^2\pi+1}{n}\right)$
9. $\ln(\cos(1/n^2))$
10. $\sqrt[3]{n^4+3n-1}$
11. $\dfrac{1}{1-\sin(1/n)}-1$
12. $\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^n$

4. Exercices développements limités

Déterminer le développement limité de la fonction donnée en a et à l'ordre n

1. $\sin x + x\cos x \ ;\ a=0\ ;\ n=3$
2. $e^x\ln(1+x)\ ;\ a=0\ ;\ n=3$
3. $\sqrt{1+x^2}+\cos^2 x\ ;\ a=0\ ;\ n=4$
4. $\ln(1+\sin x)\ ;\ a=0\ ;\ n=3$
5. $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\ ;\ a=0\ ;\ n=3$
6. $\sqrt{1+e^x}\ ;\ a=0\ ;\ n=3$
7. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\ ;\ a=0\ ;\ n=3$
8. $\cos(x)\ ;\ a=\pi/3\ ;\ n=3$
9. $\ln(\ln(x))\ ;\ a=e\ ;\ n=3$
10. $\arctan x+\dfrac{1}{1+x^2}\ ;\ a=0\ ;\ n=3$
11. $(\cos x)^{\sin x}\ ;\ a=0\ ;\ n=3$
12. $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t}\ ;\ a=0\ ;\ n=5$