1. Déterminer la nature de la série $\left(\sum \dfrac{(-1)^n n}{n^3+\sqrt{n}}\right)$.

Corrigé

On pose $u_n = \dfrac{(-1)^n n}{n^3+\sqrt{n}}$. On a alors : $|u_n| = \dfrac{n}{n^3+\sqrt{n}} \sim \dfrac{n}{n^3} \sim \dfrac{1}{n^2}$ puisque $\sqrt{n}$ est négligeable devant n^3.
La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann). Par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge. On en déduit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc converge.

2. Déterminer la nature de la série $\left(\sum \dfrac{2+2^n}{(\ln n)^n - n^2}\right)$.

Corrigé

On pose $u_n = \dfrac{2+2^n}{(\ln n)^n - n^2}$. On a alors $u_n \sim \dfrac{2^n}{(\ln n)^n}$ puisque n^2 est négligeable devant 3^n qui est inférieur à $(\ln n)^n$ pour n assez grand.
Maintenant, pour n assez grand, $\ln n \geqslant 4$ et $\dfrac{2^n}{(\ln n)^n} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Or la série $\sum \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ converge.
On en déduit que $\sum u_n$ converge.

3. On considère la série $\left(\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}\right)$. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que la série converge.

Corrigé

On pose $f : t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^2}$. Comme $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln t$ sont des fonctions croissantes et à valeurs positives sur $]1, +\infty[$, $t \mapsto t(\ln t)^2$ est croissante et à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et donc f est décroissante.
On en déduit, par comparaison série intégrale que pour tout $n \geqslant 3$

$$\int_3^{n+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leqslant \int_2^n f(t)dt.$$

Maintenant, un primitive de f sur $]1, +\infty[$ est $t \mapsto -\frac{1}{\ln t}$. La partie de droite de l'inégalité ci-dessus devient alors

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leqslant \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_2^n \leqslant \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln 2}.$$

On en déduit que **la suite des sommes partielles** est bornée par $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2(\ln 2)^2}$, comme la série est **à termes positifs**, la série converge.

Bonus : Déterminer un équivalent du reste de la série de l'exercice précédent

Corrigé

On reprend le résultat de la comparaison série intégrale pour $3 \leqslant p \leqslant n$ pour encadrer $A = \sum_{k=p+1}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^2}$.

$$\frac{1}{\ln(p+1)} - \frac{1}{\ln(n+1)} \leqslant \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_{p+1}^{n+1} \leqslant A \leqslant \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_{p}^{n} \leqslant \frac{1}{\ln p} - \frac{1}{\ln(n)}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient un encadrement de $R_p = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$:

$$\frac{1}{\ln(p+1)} \leqslant R_p \leqslant \frac{1}{\ln p}.$$

On en déduit que $R_p \sim \frac{1}{\ln p}$, en effet,

$$\frac{\ln p}{\ln(p+1)} \leqslant \frac{R_p}{\frac{1}{\ln p}} \leqslant 1$$

et $\frac{\ln p}{\ln(p+1)} = \frac{\ln p}{\ln p + \ln(1+\frac{1}{p})} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$