1. On considère $f : x \mapsto x + \cos(x)$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. A l'aide d'un argument de convexité / concavité, déterminer un encadrement de la forme

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \alpha_1 x + \beta_1 \leqslant f(x) \leqslant \alpha_2 x + \beta_2.$$

Corrigé

La fonction f est deux fois dérivable et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f''(x) = -\cos(x) \leqslant 0$. On en déduit que f est concave ($-f$ est convexe). De ce fait, on sait que la courbe de f est « en dessous » des ses tangentes et « au dessus » de ses cordes. Comme $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1 + \sin 0 = 1$, la tangente au point d'abscisse 1 est d'équation : $y = x + 1$. De même, la corde sur l'intervalle considéré est la droite passant par les points $(0, f(0))$ et $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$. C'est-à-dire les points $(0, 1)$ et $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. On en déduit que l'équation de la corde est : $y = 1 + \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{\frac{\pi}{2}} x$. Finalement, pour tout x dans $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$1 + \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{\frac{\pi}{2}} x \leqslant f(x) \leqslant x + 1.$$

2. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

Corrigé

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt$	☐ Converge	☑ Diverge
b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t \ln t} dt$	☐ Converge	☑ Diverge
c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos t}{t^2} dt$	☐ Converge	☑ Diverge
d) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{t^3 - 5t^2 + 8t - 4}} dt$	☐ Converge	☑ Diverge

3. Pour tout entier naturel n on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$$

(a) Montrer que I_n converge

Corrigé

Soit $n \in \mathbf{N}$. La fonction $f_n : t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus

$$t^2 f_n(t) = t^{n+2} e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $t^{n+2}e^{-t^2} = (t^2)^{\frac{n+2}{2}} e^{-t^2}$ et que $X^\alpha e^{-X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit que $f_n(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc f_n aussi. Cela montre que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_n$ est absolument convergente donc convergente puis que I_n est convergente.

(b) Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

Corrigé

On procède par intégration par partie.

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{n+1} I_{n+2} = \frac{2}{n+1} I_{n+2}$$

car le crochet converge et vaut 0.

Remarque : En sachant que

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{(intégrale de Gauss)}$$

et que

$$I_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

on peut exprimer I_n.