1. Soit $x > 0$. On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}$.

   (a) Justifier que $f(x)$ est définie.

   Corrigé

   La fonction $h : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$. De plus, pour $t \geqslant 1$, $0 \leqslant h(t) \leqslant e^{-t}$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ converge, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}$ converge pour tout $x > 0$.

   (b) Déterminer un équivalent de $f(x)$ pour $x \to +\infty$.
   On pourra utiliser une intégration par parties.

   Corrigé

   On pose

   $$u(t) = \frac{1}{t} \qquad u'(t) = -\frac{1}{t^2} \qquad v(t) = -e^{-t} \qquad v'(t) = e^{-t}$$

   Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ donc, pour $x > 0$,

   $$f(x) = \left[-\frac{e^{-t}}{t}\right]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt.$$

   De plus $\dfrac{e^{-t}}{t^2} = o\left(\dfrac{e^{-t}}{t}\right)$ donc par sommation des relations de comparaison pour les intégrales convergentes, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt = o(f(x))$. De ce fait, $\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x}.}$

2. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)}dx$$

Corrigé

On pose pour tout entier n non nul,
$$f_n : x \mapsto \frac{n\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)}$$
Ce sont des fonctions continues sur $[0,+\infty[$.
On sait que, à x fixé, quand n tend vers $+\infty$, $\ln(1+\frac{x}{n}) \sim \frac{x}{n}$.
On en déduit que $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{x}{x(1+x^2)} = \dfrac{1}{(1+x^2)}$. Cela signifie que
$$(f_n) \xrightarrow{CS} f$$
où $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Hypothèse de domination : La fonction $X \mapsto \ln(1+X)$ est concave, on en déduit que pour tout $X \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+X) \leqslant X$ et donc
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in [0,+\infty[, \quad |f_n(x)| = \frac{n\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$$
Or $\varphi : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$. Comme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, φ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
D'après le théorème de convergence dominée,
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)}dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$