Partie I - Exemples de sous-algèbres

1) $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont non vides car ils contiennent la matrice nulle.
Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}, B = (b_{i,j}) \in T_n(\mathbb{K})$ (respectivement : $T_n^+(\mathbb{K})$) et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Soit $C = (c_{i,j}) = \lambda A + B$ et $E = (e_{i,j}) = AB$.
Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i > j$ (respectivement : $i \geqslant j$),

$$c_{i,j} = \lambda a_{i,j} + b_{i,j} = \lambda 0 + 0 = 0$$

donc $C \in T_n(\mathbb{K})$ (respt : $T_n^+(K)$).
Ainsi $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i > j$ (respectivement : $i \geqslant j$),

$$e_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$$

car pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $k < i$ ou $k \geqslant i > j$ (respectivement : $k \leqslant i$ ou $k > i \geqslant j$) donc $a_{i,k} = 0$ ou $b_{k,i} = 0$. donc $E \in T_n(\mathbb{K})$ (respt : $T_n^+(K)$).
$\boxed{\text{Ainsi } T_n(\mathbb{K}) \text{ et } T_n^+(\mathbb{K}) \text{ sont des sous-algèbres de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).}$

2) a) $\mathscr{A}_F$ est non vide car il contient l'endomorphisme nul de E dans lui-même car $0_{\mathscr{L}(E)}(F) = \{0_E\} \subset F$.
Soient $u, v \in \mathscr{A}_F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $w = \lambda u + v$ et $x = u \circ v$.
Pour tout $f \in F$, $w(f) = \lambda u(f) + v(f) \in F$ car $u(f)$ et $v(f)$ appartiennent à F et car F est stable par combinaison linéaire. Ainsi $w \in \mathscr{A}_F$.
Pour tout $f \in F$, $x(f) = u(v(f)) \in F$ car $v(f) \in F$. Ainsi $x \in \mathscr{A}_F$.
Donc $\boxed{\mathscr{A}_F \text{ est une sous-algèbre de } \mathscr{L}(E).}$

b) Soit $\mathcal{F}$ une base de F. Par le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base $\mathcal{E}$ de E.
Un endomorphisme u de E appartient à $\mathscr{A}_F$ si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{E}$ est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_{n-p,p} & C \end{array}\right)$ (où A est la matrice dans $\mathcal{F}$ de l'endomorphisme de F induit par u et $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{K})$).
L'application de $\mathscr{A}_F$ vers $\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{K})$ qui à tout u associe le triplet de matrices (A, B, C) dans les notations précédentes est bijective et linéaire donc

$$\begin{aligned}
\dim(\mathscr{A}_F) &= \dim(\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{K})) \\
&= \dim(\mathcal{M}_p(\mathbb{K})) + \dim(\mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})) + \dim(\mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{K})) \\
&= p^2 + p(n-p) + (n-p)(n-p) = p^2 + n(n-p) = \boxed{p^2 + n^2 - np}
\end{aligned}$$

c)

$$\forall p \in [\![1, n-1]\!] \qquad n^2 - pn + p^2 = (p - \frac{n}{2})^2 + \frac{3n^2}{4}$$

est maximal quand $|p - \frac{n}{2}|$ est maximal, c'est-à-dire quand $p = 1$ ou $p = n - 1$.
La valeur du maximum est donc $\boxed{n^2 - n + 1}$.

3) Soit $\Gamma(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.

a) Posons $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
$\Gamma(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(I_2, B)$ donc $\Gamma(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
De plus $B^2 = -I_2 \in \Gamma(\mathbb{K})$. On a également $I_2 I_2 = I_2 \in \Gamma(\mathbb{K})$ et $I_2 B = BI_2 = B \in \Gamma(\mathbb{K})$. On en déduit que tout produit de deux combinaisons linéaires de I_2 et B est combinaison linéaire de I_2 et B. Ainsi $\Gamma(\mathbb{K})$ est stable par multiplication.
Donc $\boxed{\Gamma(\mathbb{K}) \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$

b) B n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ car n'est pas la matrice vide mais n'a aucune valeur propre réelle car si λ est valeur propre, $0 = \det(B - \lambda I_2) = \lambda^2 + 1$, équation sans racine réelle.
Donc $\boxed{\Gamma(\mathbb{R}) \text{ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$

c) B a deux valeurs propres distinctes i et $-i$ dans $\mathbb{C}$ et $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, donc B est diagonalisable. Il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $B = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.
Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, $aI_2 + bB = aPI_2P^{-1} + bPDP^{-1} = P(aI_2 + bD)P^{-1}$ est diagonalisable car $aI_2 + bB$ est diagonale.
Donc $\boxed{\Gamma(\mathbb{C}) \text{ est une sous-algèbre diagonalisable de } \mathscr{M}_2(\mathbb{C}).}$

Partie II - Une sous-algèbre commutative de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

Dans cette partie, on suppose $n \geqslant 2$.

Pour tout $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on pose

$$J(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de la forme $J(a_0, \ldots, a_{n-1})$ où $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ défini par $\varphi : e_j \mapsto e_{j+1}$ si $j \in \{1, \ldots n-1\}$ et $\varphi(e_n) = e_1$, où $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

4) $J^k = Mat_{can}(\varphi^k)$ où can désigne la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
Or pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\varphi^k(e_j) = e_r$ où r désigne l'unique entier de $[\![1, n]\!]$ congru à $j + k$ modulo n ("division euclidienne avec offset").
Posant $J_k = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ on a (en notant $(e_1^*, \ldots, e_n^*) = can^*$ la base duale de can :

$$\boxed{b_{i,j} = e_i^*(\varphi^k(e_j)) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \equiv j + k \bmod n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Autrement dit, en notant r le reste de la division euclidienne de k par n, J^k a des zéros partout sauf sur la $r^{ème}$ parallèle au dessous de la diagonale et, si $r \neq 0$, sur la $(n-r)^{ème}$ parallèle au dessus de la diagonale, où il y a des 1.

5) $\boxed{J(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k}$

6) Par la question précédente, $(I_n, J, J^2, \ldots, J^{n-1})$ engendre $\mathscr{A}$, et elle est libre car pour tous complexes $a_0, \ldots, a_{n-1}$ tels que $\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = 0$, on a $J(a_0, \ldots, a_{n-1}) = 0$ d'où (en considérant les coefficients de la première colonne) $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$.
C'est donc une $\boxed{\text{base de } \mathscr{A}.}$

7) Par la question précédente $\mathscr{A} = Vect(I, J, \dots, J^{n-1})$ donc est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
De plus pour $A, B \in \mathscr{A}$, il existe $a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que $A = J(a_0, \dots, a_{n-1}$ et $B = J(b_0, \dots, b_{n-1})$ et on a :

$$AB = (\sum_{p=0}^{n-1} a_p J^p)(\sum_{q=0}^{n-1} a_q J^q) = \sum_{0 \leqslant p,q \leqslant n-1} a_p b_q J^{p+q} \in \mathrm{Vect}(I, J, \dots, J^{n-1})$$

car pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J^k = J^r$ où r est le reste de la division euclidienne de k par n.
Donc $AB \in \mathscr{A}$. De plus, le calcul de BA donne le même résultat.
Ainsi $\boxed{\mathscr{A} \text{ est une sous-algèbre commutative de } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).}$

8) Les valeurs propres de J sont les solutions de l'équation :

$$0 = \det(J - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Par développement selon la première colonne, ce déterminant est égal à

$$-\lambda \det(T_1) + (-1)^{n+1} \det(T_2)$$

où $T_1 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & \\ 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$ et $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ -\lambda & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$ sont respectivement triangulaire supérieure et triangulaire inférieure donc ont des déterminants égaux aux produits de leurs coefficients diagonaux.
Donc

$$\det(J - \lambda I_n) = -\lambda(-\lambda)^{n-1} + (-1)^{n+1}.1^{n-1} = (-1)^n(\lambda^n - 1)$$

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } J \text{ sont donc les racines } n^{\text{èmes}} \text{ de l'unité.}}$

Pour tout $\omega \in \mathbb{U}_n$, $E_\omega(J) = \ker(J - \omega I_n)$ est l'ensemble des $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 = \omega x_0 \\ x_2 = \omega x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} = \omega x_{n-2} \\ x_0 = \omega x_{n-1} \end{array} \right.$$

ce qui équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 = \omega x_0 \\ x_2 = \omega^2 x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} = \omega^{n-1} x_0 \\ x_0 = \omega^n x_0 \end{array} \right.$$

Comme $\omega^n = 1$, on a donc $\boxed{E_\omega(J) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix})}$

Les vecteurs propres associés à ω sont les vecteurs non nuls de $E_\omega(J)$.
Remarque : le calcul de déterminant réalisé précédemment n'est pas indispensable, car le raisonnement ci-dessus montre que si $\omega \in \mathbb{U}_n$ alors ω est valeur propre car $E_\omega(J)$ n'est pas réduit à $\{colonne\ nulle\}$ et que si $\omega \notin \mathbb{U}_n$ et si $X \in E_\omega(J)$ alors $x_0 = 0$ puis $x_1 = \omega.0 = 0$, etc... donc ω n'est pas valeur propre.
variante : comme $\mathbb{U}_n$ est de cardinal n, J a au moins n valeurs propres distinctes, et comme elle en a au plus n, on a $Sp(J) = \mathbb{U}_n$.
Comme J a n valeurs propres distinctes, $\boxed{J \text{ est diagonalisable dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).}$

9) $\boxed{\mathscr{A} \text{ est diagonalisable}}$ par le même raisonnement qu'à la question 3)c).

10) Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. et $Q = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.
Notant $P = ((e^{\frac{2iq\pi}{n}})^p)_{0 \leqslant p,q \leqslant n-1}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ à la base propre obtenue à la question 8, on a
$$J = PDP^{-1}$$
avec $D = Diag(1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, \ldots, e^{\frac{2i\pi(n-1)}{n}})$.
On en déduit que pour tout naturel k, $J^k = P\ Diag(1, e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \ldots, e^{\frac{2i\pi k(n-1)}{n}})\ P^{-1}$ puis
$$J(a_0, \ldots, a_{n-1}) = P\Delta P^{-1}$$
avec $\Delta = Diag(Q(1), Q(e^{\frac{2i\pi}{n}}), \ldots, Q(e^{\frac{2i\pi(n-1)}{n}}))$.
Les valeurs propres de $J(a_0, \ldots, a_{n-1})$ sont les solutions de
$$0 = det(J(\ldots) - \lambda I_n) = \det(P(\Delta - \lambda I_n)P^{-1}) = \det(\Delta - \lambda I_n) = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (Q(\omega) - \lambda)$$
Donc $\boxed{Sp(J(\ldots)) = \{Q(\omega),\ \omega \in \mathbb{U}_n\}}$ (son cardinal n'est pas toujours n).

Partie III - Sous-algèbres strictes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale

11) Le plus rapide est de constater que pour $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{i,j})$,
$$< A, B >= \operatorname{tr}((\sum_j a_{ij} b_{kj})_{1 \leqslant i,k \leqslant n}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$$
donc $\boxed{< .,. > \text{ est le produit scalaire canonique sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{(\llbracket 1,n \rrbracket^2)}}$.
Sinon, on peut vérifier un à un les points de la définition d'un produit scalaire :
- symétrie : $< B, A >= \operatorname{tr}(B^T A) = \operatorname{tr}((B^T A)^T) = \operatorname{tr}(A^T B) =< A, B >$
- linéarité à droite ($< (, A > \lambda B + C = \lambda < A, B > + < A, C >$) par bilinéarité du produit matriciel et linéarité de la trace
- positivité : $< A, A >= \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geqslant 0$
- caractère défini : si $< A, A >= 0$ alors $A = 0$ car une somme de carrés de réels n'est nulle que si tous ses termes sont nuls.

12) Comme $\mathscr{A}$ est de dimension finie, $\mathscr{A}^\perp$ est supplémentaire de $\mathscr{A}$ donc
$$\boxed{r = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathscr{A} = n^2 - d}$$

13) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Comme $\mathscr{A}$ est de dimension finie, $\boxed{\mathscr{A} = (\mathscr{A}^\perp)^\perp.}$
On a donc
$$\boxed{M \in \mathscr{A} \Leftrightarrow (\forall N \in \mathscr{A}^\perp < N, M >= 0) \Leftrightarrow (\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket < A_i, M >= 0}\,)$$
La dernière assertion implique bien l'avant dernière car tout vecteur de $\mathscr{A}^\perp$ est combinaison linéaire des A_i et $< .,. >$ est bilinéaire.

14) Soient $N \in \mathscr{A}$ et $i \in [\![1, r]\!]$.
Pour tout $M \in \mathscr{A}$,

$$< N^T A_i, M >= \operatorname{tr}((N^T A_i)^T M) = \operatorname{tr}(A_i^T N M) =< A_i, NM >= 0$$

car $A_i \in \mathscr{A}^\perp$ et $NM \in \mathscr{A}$ car $\mathscr{A}$ est stable par produit matriciel.
Donc $\boxed{N^T A_i \in \mathscr{A}^\perp.}$

15) La transposition est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\mathscr{A}^T$, en tant qu'image directe du sous-espace vectoriel $\mathscr{A}$ par l'application linéaire injective qu'est la transposition, est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $\boxed{\text{de même dimension que } \mathscr{A}}$ (car la transposition induit un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{A}^T$).
De plus $\mathscr{A}^T$ est stable par produit matriciel : pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{A}$, $A^T B^T = (BA)^T \in \mathscr{A}^T$ car $BA \in \mathscr{A}$.
Donc $\boxed{\mathscr{A}^T \text{ est une sous-algèbre}}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

16) Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et soit $F = \mathsf{Vect}(A_1 X, \ldots, A_r X)$.
Soit $M \in \mathscr{A}^T$. Alors l'unique antécédent M^T de M par la transposition appartient à $\mathscr{A}$. Soit $i \in [\![1, r]\!]$.
Par la question 14), $(M^T)^T A_i \in \mathscr{A}^\perp$ donc $M A_i \in \mathscr{A}^\perp$. Donc il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que $M A_i = \sum_{k=1}^r \lambda_k A_k$.

$$M(A_i X) = \sum_{k=1}^r \lambda_k A_k X \in F$$

Pour tout élément Y de F, comme Y est combinaison linéaire de $A_1 X, \ldots, A_r X$ et comme F est stable par combinaison linéaire, $MY \in F$.
Donc $\boxed{F \text{ est stable multiplication à gauche par } M.}$

17) D'après les questions 2)b), et 2)c), l'ensemble $\mathscr{A}_F$ des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension n qui stabilisent un même sous-espace vectoriel non trivial F est de dimension au plus $n^2 - n + 1$.
• Dans les notations précédentes, supposons qu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $F = Vect(A_1 X, \ldots, A_r X)$ soit un sous-espace non trivial de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.
Comme les éléments de $\mathscr{A}^T$ (identifiés à des éléments de $\mathcal{L}(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ stabilisent F, ils appartiennent à $\mathscr{A}_F$. On a donc $\mathscr{A}^T \subset \mathscr{A}_F$.
Ainsi

$$\dim \mathscr{A} = \dim \mathscr{A}^T \leqslant \dim \mathscr{A}_F \leqslant n^2 - n + 1$$

.
• Sinon, on a pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $F = \{0\}$ ou $F = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Comme $r \geqslant 1$ (car $\mathscr{A}$ est différente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et comme A_1 n'est pas nulle (car $(A_1, \ldots, A_r)$ est libre), il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $A_1 X \neq 0$ et donc telle que $F \neq \{0\}$.
Pour un tel X, on a donc $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = F = Vect(A_1 X, \ldots, A_r X)$ donc $r \geqslant n$ et par conséquent

$$d = n^2 - r \leqslant n^2 - n \leqslant n^2 - n + 1$$

$\boxed{\text{Dans tous les cas, } d \leqslant n^2 - n + 1}$

Enfin, par la partie I, il existe une sous-algèbre stricte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - n + 1$: il suffit de considérer l'algèbre des matrices qui stabilisent une droite ou un hyperplan de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Donc $\boxed{n^2 - n + 1 \text{ est la dimension maximale des sous-algèbres strictes de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$