Exercice 1 :

On pose $f_0 : t \mapsto 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \geqslant 0$,

$$f_{n+1}(t) = \sqrt{t + f_n(t)}.$$

1) Déterminer la limite simple de la suite (f_n). On notera cette limite f.
2) La convergence de la suite (f_n) vers f est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?
3) Montrer que pour $t > 0$, $|f_{n+1}(t) - f(t)| \leqslant \dfrac{|f_n(t) - f(t)|}{2f_{n+1}(t)}$.
4) En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur tout tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$.

Exercice 2 :

On considère les fonctions ζ et η définies par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \qquad \text{et} \qquad \eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$

On posera $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$.

1) Déterminer les ensembles de définitions de ces deux fonctions.
2) a) Soit $x > 1$. Établir une relation entre $\zeta(x)$ et $\eta(x)$.
   b) Soit $a > 1$. Montrer que la série définissant ζ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
   c) Déterminer les limites de ζ et η en $+\infty$.
3) a) Soit $x > 0$. Étudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction $h_x : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)$ est monotone à partir d'un rang (dépendant de x) que l'on précisera.
   b) Soit $a > 0$. Montrer que la série $\left(\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1} f_n'(x)\right)$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
   c) En déduire que η est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   d) Déterminer à l'aide de $\eta(1)$ et $\eta'(1)$ des réels a et b tels que, au voisinage de 1^+,

$$\zeta(x) = \frac{a}{x-1} + b + \underset{x \to 1}{o}(1)$$