Exercice

On pose φ_0 la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\varphi_0 : t \mapsto e^{-t^2}.$$

1) La fonction φ_0 est continue et positive sur $[0,+\infty[$. De plus $t^2 e^{-t^2}$ tend vers 0 en $+\infty$ donc φ_0 est négligeable devant $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Cette dernière fonction est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc φ_0 est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2) Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue, la fonction φ_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout x dans $[0,+\infty[$,
$$\varphi_1'(x) = -\varphi_0(x) = -e^{-x^2}.$$

3) a) Soit $x \in]0,+\infty[$, $\varphi_1(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_x^{+\infty} \frac{-1}{2t}(-2t).e^{-t^2} dt.$

On procède par intégration par parties.

$$\varphi_1(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \left[\frac{-1}{2t} e^{-t^2}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2} e^{-t^2} dt$$

En calculant le crochet (qui converge), on obtient que

$$\varphi_1(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2x} e^{-x^2} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2} e^{-t^2} dt.$$

En particulier, l'intégrale de droite converge.

b) Quand t tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{2t} e^{-t^2}$ est négligeable devant e^{-t^2}. Donc par intégration des relations de comparaisons pour les intégrales des fonctions positives, $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2} e^{-t^2} dt$ est négligeable devant $\varphi_1 : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$. De ce fait $\boxed{\varphi_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x} e^{-x^2}}$.

c) On a vu que φ_1 était de classe $\mathscr{C}^1$. Elle est donc continue sur $[0,+\infty[$ et de plus, $\varphi_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x} e^{-x^2}$. Or , $x \mapsto \dfrac{1}{2x} e^{-x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (cela a été vu en 3.a)) donc, par comparaison pour les fonctions positives, φ_1 est intégrable sur $[1,+\infty[$ et donc sur $[0,+\infty[$.

d) On réalise une intégration par parties

$$\int_0^{+\infty} \varphi_1(x) dx = \int_0^{+\infty} 1.\varphi_1(x) dx = [x\varphi_1(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x\varphi_1'(x).$$

En effet le crochet converge et vaut 0 puisque $\varphi_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x^2}}{2x}$. En utilisant la formule de la dérivée de φ_1 déterminée en 2. on a donc

$$\int_0^{+\infty} \varphi_1(x) dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

4) On veut montrer par récurrence que pour tout entier n, il existe des fonctions $(\psi_0, \ldots, \psi_n)$ de classe $\mathscr{C}^1$, intégrables sur $[0,+\infty[$ telles que

— $\psi_0 = \varphi_0$

— pour tout $0 \leqslant k < n$, $\psi_{k+1} : x \mapsto \int_x^{+\infty} \psi_k(t)dt$.

— pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, $\psi_k(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(2x)^k} e^{-x^2}$.

On remarque que la propriété est vraie pour $n = 0$ (et aussi pour $n = 1$).

On se donne un entier n et on suppose la propriété vraie pour cet entier et on veut la démontrer pour l'entier $n+1$. On remarque que, comme ψ_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et que $\psi_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(2x)^n} e^{-x^2}$ alors on peut poser

$$\psi_{n+1} : x \mapsto \int_x^{+\infty} \psi_n(t)dt$$

qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. Il ne reste plus qu'à vérifier la formule pour l'équivalent en $+\infty$. Comme on sait que $\psi_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(2x)^n} e^{-x^2}$ on a, par intégration des relations de comparaisons pour les intégrales convergentes des fonctions positives que

$$\psi_{n+1}(x) = \int_x^{+\infty} \psi_n(t)dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{1}{(2t)^n} e^{-t^2} dt.$$

Or, on peut réaliser une intégration par parties sur cette intégrale. Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} \frac{1}{(2t)^n} e^{-t^2} dt &= \int_x^{+\infty} \frac{1}{(2t)^{n+1}} (2t) e^{-t^2} dt \\
&= \left[-\frac{1}{(2t)^{n+1}} e^{-t^2} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}t^{n+2}} e^{-t^2} dt \\
&= \frac{1}{(2x)^{n+1}} e^{-x^2} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}t^{n+2}} e^{-t^2} dt
\end{aligned}$$

Maintenant, comme à la question 3.b), $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}t^{n+2}} e^{-t^2} dt$ est négligeable devant $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{1}{(2t)^n} e^{-t^2} dt$ d'où $\psi_{n+1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(2x)^{n+1}} e^{-x^2}$. Ce permet de conclure la récurrence.

Problème

Partie I

1) Si $a = b$ alors $a_0 = b_0 = a$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = b_n = a$ alors $a_{n+1} = b_{n+1} = a$ (en particulier car $\sqrt{a^2} = |a| = a$).
   On en déduit par récurrence que

   $$\boxed{\text{Si } a = b \text{ alors } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont constantes égales à } a}$$

2) Soient $x, y \geqslant 0$. On a $0 \leqslant (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{xy} + y$. On en déduit (inégalité arithmético-géométrique) que

   $$\boxed{\forall x, y \geqslant 0,\ \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}}$$

On pouvait aussi que l'inégalité est évidente si x ou y est nul, et sinon,

$$\begin{aligned}\sqrt{xy} &= \exp(\frac{1}{2}(\ln x+\ln y)) \\ &\leqslant \exp(\ln\frac{x+y}{2}) \quad \text{par concavité du logarithme et croissance de l'exponentielle} \\ &= \frac{x+y}{2}\end{aligned}$$

3) Une récurrence immédiate montre que $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n,b_n\geqslant 0$. Avec la question précédente, on a donc $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}\leqslant b_{n+1}$ ou encore

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n\leqslant b_n$$

Soit $n\geqslant 1$. On a $a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\geqslant\sqrt{a_n^2}=a_n$ et $b_{n+1}\leqslant\frac{2b_n}{2}=b_n$. Ceci montre que

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\text{ croît et }(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\text{ décroît}}$$

Comme $a_1\leqslant a_n\leqslant b_n\leqslant b_1$ pour $n\geqslant 1$, les suites sont donc à termes dans $[a_1,b_1]$ à partir du rang 1 et donc bornées (bornée équivaut à bornée à partir d'un certain rang).

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ et }(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ sont bornées}}$$

4) Par théorème de limite monotone, les suites sont convergentes à limite ℓ_a et ℓ_b dans $[a_1,b_1]$ par passage aux limites dans les inégalités larges, et donc strictement positives. En pasant à la limite dans la relation de récurrence pour (b_n), on obtient $\frac{\ell_a+ellb}{2}=\ell_b$ donc $\ell_a=\ell_b$.

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ et }(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ sont convergentes de même limite strictement positive}}$$

5) Notons (a'_n) et (b'_n) les suites définies par les mêmes relations de récurrence mais avec $a'_0=b$ et $b'_0=a$. On a alors $a'_1=a_1$ et $b'_1=b_1$. Comme les suites sont récurrentes d'ordre 1, elles sont égale à partir du rang 1 et donc de même limite. De même, Notons (α_n) et (β_n) les suites définies par les mêmes relations de récurrence mais avec $\alpha_0=\lambda a_0$ et $\beta_0=\lambda b$. On a alors $\alpha_1=\lambda a_1$ et $\beta_1=\lambda b_1$ puis, par récurrence simple, $\alpha_n=\lambda a_n$ et $\beta_n=\lambda b_n$ pour tout n. Finalement,

$$\boxed{M(b,a)=M(a,b)\text{ et }\forall\lambda>0,\ M(\lambda a,\lambda b)=\lambda M(a,b)}$$

6) On utilise ceci avec $\lambda=1/a>0$: $\frac{1}{a}M(a,b)=M(1,b/a)=f(b/a)$. On a donc

$$\boxed{M(a,b)=af\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Partie II

7) $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et équivalent au voisinage des infinis à $1/t^2$ et donc intégrable sur de tels voisinages. La fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. A fortiori,

$$\boxed{I(a,b)\text{ et }J(a,b)\text{ existent}}$$

La fonction f ci-dessus étant paire, son intégrale sur $\mathbb{R}^+$ vaut celle sur $\mathbb{R}^-$: en effectuant le changement de variable $x=-t,\ dx=-dt$: $\int_0^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{-\infty}f(-t)(-dt)=\inf_{-\infty}^0 f(t)dt$. Ainsi, par relation de Chasles

$$\boxed{J(a,b)=\int_{-\infty}^0 f+\int_0^{+\infty}f=2I(a,b)}$$

8) $s \mapsto \frac{1}{2}\left(s - \frac{ab}{s}\right)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante comme somme de telles fonctions. Ses limites en 0^+ et $+\infty$ sont $-\infty$ et $+\infty$. Posons $t = \frac{1}{2}\left(s - \frac{ab}{s}\right)$. On a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + t^2 &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{4s^2}(s^2 - ab)^2 \\
&= \frac{1}{4s^2}\left(s^2(a+b)^2 + (s^2 - ab)^2\right) \\
&= \frac{1}{4s^2}\left(s^4 + (a^2+b^2)s^2 + a^2b^2\right) \\
&= \frac{1}{4s^2}(s^2+a^2)(s^2+b^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sqrt{ab})^2 + t^2 &= ab + \frac{1}{4s^2}(s^2 - ab)^2 \\
&= \frac{1}{4s^2}(s^2+ab)^2
\end{aligned}$$

Par ailleurs, avec les conventions d'écriture usuelles

$$dt = \frac{ds}{2}\left(1 + \frac{ab}{s^2}\right) = \frac{ds}{2s^2}(s^2+ab)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + t^2\right)\left(\sqrt{ab}^2 + t^2\right)}} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{2s^2}}{\frac{1}{4s^2}} \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s^2)(b^2+s^2)}} = \boxed{2I(a,b)}
\end{aligned}$$

9) Par les deux questions précédentes,

$$\forall a, b > 0, \quad I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = I(a,b)$$

Par récurrence immédiate,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I(a_n, b_n) = I(a,b)}$$

10) a) On utilise le théorème de convergence dominée.

- $f_n\ :\ t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(a_n^2+t^2)(b_n^2+t^2)}}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
- La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(M(a,b)^2+t^2)(M(a,b)^2+t^2)}}$ elle même continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Comme pour tout $n \geqslant 1$ on a $a_n, b_n \geqslant a_1 > 0$ (partie I) on en déduit que

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall t \in \mathbb{R},\ |f_n(t)| \leqslant \frac{1}{a_1^2 + t^2} = \varphi(t)$$

  La fonction φ (indépendante de n) est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\varphi(t) = O_{t\to\infty}(1/t^2)$ et car $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Le théorème s'applique et donne

$$\lim_{n\to+\infty} I(a_n, b_n) = I(M(a,b), M(a,b))$$

b) Par ailleurs, par la question 9),

$$\lim_{n\to+\infty} I(a_n, b_n) = I(a, b)$$

Par unicité de la limite, on a donc :

$$\boxed{I(M(a,b), M(a,b)) = I(a,b)}$$

11) On remarque que

$$\forall \alpha > 0,\ I(\alpha,\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\alpha^2} = \left[\frac{1}{\alpha}\arctan\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\alpha}$$

Ainsi, avec la question 10,

$$I(a,b) = \frac{\pi}{2M(a,b)}$$

ou encore

$$\boxed{M(a,b) = \frac{\pi}{2I(a,b)}}$$

Partie III

12) $s \mapsto x/s$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$, strictement décroissante et ses limites en 0^+ et $+\infty$ sont $+\infty$ et 0. On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} &= \int_{+\infty}^{\sqrt{x}} \frac{(-x/s^2)\ ds}{\sqrt{(1+x^2/s^2)(x^2+x^2/s^2)}} \\ &= \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2+x^2)(1+s^2)}}\end{aligned}$$

Par relation de Chasles, on a

$$I(1,x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} + \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2+x^2)(1+s^2)}}$$

On conclut ainsi que

$$\boxed{\forall x > 0,\ I(1,x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}\ dt}$$

13) Remarquons que

$$\forall t \geqslant 0,\ \left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\right| = \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} \leqslant \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{x^2+t^2}}$$

Par concavité de $y \mapsto \sqrt{y}$ (courbe en dessous de la tangente en $y = 1$) on a aussi

$$\forall y \geqslant -1,\ \sqrt{1+y} \leqslant 1 + \frac{y}{2}$$

On pouvait aussi utiliser la quantité conjuguée : $\sqrt{1+y} - 1 = \frac{1+y-1}{\sqrt{1+y}+1} \leqslant \frac{y}{2}$ pour $y \geqslant 0$ (et également pour $-1 \leqslant y \leqslant 0$ car la multiplication par y renverse alors les inégalités).

Ainsi,

$$\forall t \in [0,\sqrt{x}],\ \left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\right| \leqslant \frac{t^2}{2\sqrt{x^2+t^2}} \leqslant \frac{x}{2\sqrt{x^2+t^2}}$$

On intégre cette inégalité entre 0 et $\sqrt{x}$ (aucun problème d'existence) pour obtenir

$$\left| I(1,x) - 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt \right| \leqslant 2\int_0^{\sqrt{x}} \left| \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} \right| dt \leqslant x\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}$$

Or $x = o_{x\to 0}(1)$. On en conclut donc que

$$\boxed{I(1,x) - 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt \text{ est négligeable devant } 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt \text{ quand } x \text{ tend vers } 0^+}$$

14) La dérivée de $t \mapsto \ln(t+\sqrt{1+t^2})$ sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto \frac{1+\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}{t+\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Par changement de variable linéaire $s = t/x$, on. a

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt = \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{ds}{1+s^2} = \Big[\ln(s+\sqrt{1+s^2})\Big]_0^{1/\sqrt{x}}$$

et finalement,

$$\boxed{\forall x > 0,\ \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}$$

15) On a

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) = -\frac{\ln(x)}{2} + \ln(1+\sqrt{x+1}) = -\frac{\ln x}{2} + o_0(1) = -\frac{\ln x}{2} + o_0(\ln x)$$

(car ln tend vers $-\infty$ en 0) donc équivaut à $-\ln(x)/2$ quand x tend vers 0^+.
Or, d'après la question 13, quand $x \to 0$

$$I(1,x) \underset{x\to 0}{\sim} 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt$$

On en déduit avec la question 14 que

$$I(1,x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$$

Comme $f(x) = M(1,x) = \frac{\pi}{2I(1,x)}$, on a ainsi

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln(x)}}$$

16) On a (avec la partie I)

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = M\left(1, \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}M(x,1) = \frac{1}{x}M(1,x) = \frac{1}{x}f(x)$$

Quand $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0^+$ et la question précédente donne alors

$$f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\pi x}{2\ln(1/x)}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2\ln(x)}}$$

Partie IV

17) Avec les questions 7 et 8,

$$I(1,x) = I\left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right)$$

On utilise alors la question 5 avec $\lambda = \frac{1+x}{2}$:

$$M\left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right) = \frac{1+x}{2} M\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

On conclut alors avec la question 11 (utilisée deux fois) que

$$\boxed{I(1,x) = \frac{2}{1+x} I\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)}$$

18) a) Posons $h : t \mapsto \dfrac{2\sqrt{t}}{1+t}$. La fonction est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. On a alors pour $t > 0$,

$$h'(t) = \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}$$

On en déduit que h est croissante sur $[0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$. Comme h est à valeurs positives et que que $h(1) = 1$ on obtient que $h(\mathbb{R}_+) \subset [0, 1]$.
On en déduit que $w_1 = h(x) \in [0, 1]$ et que, par une récurrence immédiate, pour $n \geqslant 1$, $w_n \in [0, 1]$.
De plus, $h(t) - t = \dfrac{2\sqrt{t}}{1+t} - t = \dfrac{2\sqrt{t} - t - t^2}{1+t}$. On remarque que pour $t \in [0, 1]$, $t^2 \leqslant t \leqslant \sqrt{t}$ et donc $h(t) - t \geqslant 0$.
De ce fait, pour $n \geqslant 1$, $w_{n+1} - w_n = h(w_n) - w_n \geqslant 0$.
$\boxed{\text{La suite } (w_n)_{n\geqslant 1} \text{ est croissante.}}$
Comme de plus, la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée (par 1), elle converge. Notons ℓ sa limite, on sait de part la continuité de h que ℓ vérifie $h(\ell) = \ell$ (et que $\ell \in [0, 1]$ par passage à la limite dans les inégalités).
Or

$$h(\ell) = \ell \iff 2\sqrt{\ell} - \ell - \ell^2 = 0 \iff \sqrt{\ell}(2 - \sqrt{ell} - \sqrt{ell}^3) = 0$$

On étudie l'équation $X^3 - X - 2 = 0$; on voit que 1 est une racine évidente et on peut factoriser, $X^3 - X - 2 = (X - 1)(X^2 + X + 2)$. Comme le polynôme $X^2 + X + 2$ n'a pas de racines réelles, on obtient finalement que

$$h(\ell) = \ell \iff \sqrt{\ell} \in \{0, 1\} \iff \ell \in \{0, 1\}$$

Pour finir, pour tout entier $n \geqslant 1$, $w_n \geqslant w_1 > 0$ donc $\ell \geqslant w_1 > 0$.

$$\boxed{(w_n) \text{ converge vers } 1}$$

b) On procède par récurrence.
— $\boxed{\text{I}}$: la question 17 donne $I(1, x) = \frac{2}{1+x} I(1, w_1)$, ce qui correspond à la formule pour $n = 0$.
— $\boxed{\text{C}}$: supposons le résultat vrai à un rang $n \geqslant 0$. La question 17 donne

$$I(1, w_{n+1}) = \frac{1}{2 + w_{n+1}} I(1, w_{n+2})$$

Par le résultat au rang n, on déduit celui au rang $n + 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I(1,x) = I(1,w_{n+1}) \prod_{k=0}^{n} \frac{2}{1+w_k}}$$

c) Commençons par montrer, comme à la question 10.a) que comme (w_n) tend vers 1, la suite $(I(1,w_n))$ tend vers $I(1,1)$. Pour tout entier n on pose f_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f_n : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(w_n^2+t^2)}}$$

— Les fonctions f_n sont continues (par morceaux) sur $[0,+\infty[$.

— Comme (w_n) tend vers 1, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(1+t^2)}}$ qui est aussi continue (par morceaux)

— Hypothèse de domination : On a vu à la question 18.a) que pour $n \geqslant 1$, $w_n \geqslant w_1 > 0$. On obtient donc que pour tout entier n et tout réel t,

$$|f_n(t)| = f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(w_n^2+t^2)}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(w_1^2+t^2)}}$$

Posons alors $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(w_1^2+t^2)}}$.

C'est une fonction continue sur $[0,+\infty[$ et $\varphi \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ étant intégrable sur $[1,+\infty[$, on obtient, comme d'habitude que φ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I(1,w_n) = I(1,1) = \frac{\pi}{2}$ (d'après le calcul de la question 11)

On en déduit que (p_n) converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{\pi}{2I(1,x)}$$

$$\boxed{\text{En notant } \ell \text{ la limite de } (p_n), \text{ on a } \ell I(1,x) = \tfrac{\pi}{2}}$$

Partie V

19) Soit $x \in]-1,1[$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a donc $|x\sin(t)| < 1$ et donc $1-x^2\sin^2(t) > 0$. Ainsi, $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}$ est continue sur le segment $[0,\pi/2]$ et son intégrale sur ce segment existe.

$$\boxed{K \text{ est bien définie sur }]-1,1[}$$

20) Posons $t = \tan(s)$ ou $s = \arctan(t)$. La fonction $s \mapsto \tan(s)$ est une fonction strictement croissante, de classe $\mathscr{C}^1$ et bijective de $[0,\frac{\pi}{2}[$ dans $[0,+\infty[$.

De plus $dt = \dfrac{1}{\cos^2(s)} ds$.

$$\begin{aligned} I(1,x) &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1/\cos^2(s)}{\sqrt{(1+\tan^2(s))(x^2+\tan^2(s))}}\, ds \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{x^2\cos^2(s)+\sin^2(s)}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x>0,\ I(1,x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{x^2\cos^2(t)+\sin^2(t)}}}$$

21) Comme $\sin^2=1-\cos^2$, on a donc

$$I(1,x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-(1-x^2)\cos^2(t)}}$$

Le changement affine $u=\pi/2-t$ donne alors

$$I(1,x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-(1-x^2)\sin^2(u)}}$$

Quand $x\in]0,1[$, $1-x^2>0$ et est égal au carré de sa racine carrée et ainsi

$$\boxed{\forall x\in]0,1[,\ I(1,x)=K(\sqrt{1-x^2})}$$

22) a) On a

$$W_n-W_{n+1}=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}(t)(1-\sin^2(t))\ dt=\int_0^{\pi/2}\cos(t)\sin^{2n}(t)\cos(t)\ dt$$

$u'(t)=\cos(t)\sin^{2n}(t)$ se primitive en $u(t)=\frac{1}{2n+1}\sin^{2n+1}(t)$ et $v(t)=\cos(t)$ se dérive en $v'(t)=-\sin(t)$. Comme $u,v\in\mathscr{C}^1([0,\pi/2])$, on peut intégrer par parties pour obtenir

$$W_n-W_{n+1}=[u(t)v(t)]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}u(t)v'(t)\ dt=\frac{1}{2n+1}W_{n+1}$$

On conclut que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ W_{n+1}=\frac{2n+1}{2n+2}W_n}$$

b) On prouve le résultat par récurrence.

— $\boxed{\text{I}}$: $W_0=\frac{\pi}{2}$ et le résultat est vrai au rang 0.

— $\boxed{\text{H}}$: on suppose le résultat vrai au rang n. Avec la question précédente, et en écrivant $\frac{2n+1}{2n+2}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{2^2(n+1)^2}$,

$$W_{n+1}=\frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi=\frac{(2n+2)!}{2^{2n+3}((n+1)!)^2}\pi$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ W_n=\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi}$$

23) Il nous suffit alors d'appliquer l'égalité en $(x\sin(t))^2$ (qui est dans $]-1,1[$) :

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \forall t\in\mathbb{R},\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}\sin^{2n}(t)}$$

24) A ce niveau, on a

$$\forall x\in]-1,1[,\ K(x)=\int_0^{\pi/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}\sin^{2n}(t)\ dt$$

On veut intervertir les symboles. On va utiliser le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions. Ici, $x\in]-1,1[$ est fixé.

- $f_n \ : \ t \mapsto \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \sin^{2n}(t)$ est le terme général d'une série de fonctions continues qui converge simplement sur $[0, \pi/2]$ vers $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}$ elle même continue.
- Pour tout entier n,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n| = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)dt = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} W_n = \frac{((2n)!)^2}{16^n(n!)^4} x^{2n}$$

  Si on note θ_n ce terme, on va montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \theta_n$ en utilisant le critère de d'Alembert. En effet,

$$\frac{\theta_{n+1}}{\theta_n} = \frac{((2n+2)(2n+1))^2}{16.(n+1)^4} x^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x^2 \in [0,1[$$

Le théorème s'applique et donne

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t)\ dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} W_n$$

Il reste à utiliser l'expression de W_n pour conclure que

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ K(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((2n)!)^2}{16^n(n!)^4} x^{2n}}$$

25) On a

$$M(3,5) = M(5,3) = 5M(1,3) = \frac{5\pi}{2} \frac{1}{I(1,3/5)} = \frac{5\pi}{2} \frac{1}{K(4/5)}$$

On déduit $M(3,5)$ de $K(4/5)$ dont on a une expression sous forme de somme de série numérique.

$$M(3,5) = \frac{5}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!^2}{n!^4 5^{2n}}}$$