Calculatrices interdites. L'exercice et le problème sont indépendants.

Exercice

On pose φ_0 la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\varphi_0 : t \mapsto e^{-t^2}.$$

1) Justifier que φ_0 est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On pose pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\varphi_1(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

2) Montrer que φ_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et calculer φ_1'.

3) a) Justifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2x} e^{-x^2} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2} e^{-t^2} dt.$$

   b) En déduire un équivalent simple de φ_1 quand x tend vers $+\infty$.

   c) Justifier que φ_1 est intégrable sur $[0, +\infty[$.

   d) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_1(x) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) dx$.
   On pourra intégrer par parties en utilisant 2.

4) Montrer que l'on peut construire une suite de fonctions $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de classe $\mathscr{C}^1$, intégrables sur $[0, +\infty[$ telle que $\psi_0 = \varphi_0$ et, pour tout $k \geqslant 0$,

$$\psi_{k+1} : x \mapsto \int_x^{+\infty} \psi_k(t) dt.$$

On précisera en particulier un équivalent simple de ψ_k en $+\infty$.

Problème

Partie I

Soient a, b deux nombres réels strictement positifs, on considère les suites (a_n) et (b_n) définies par

$$\begin{cases} a_0 = a & b_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N} & a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ & b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \end{cases}$$

1) Que dire des suites (a_n) et (b_n) si $a = b$?
2) Montrer que si $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, on a

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$$

3) Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont monotones à partir du rang 1, puis qu'elles sont bornées.
4) Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite strictement positive.

On notera $M(a, b)$ la limite commune aux suites (a_n) et (b_n).
On définira la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = M(1, x)$.

5) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, exprimer en fonction de λ et $M(a, b)$ les quantités suivantes :

$$M(b, a) \quad \text{et} \quad M(\lambda a, \lambda b)$$

6) Justifier que $M(a, b) = af\left(\frac{b}{a}\right)$.

Partie II

Pour a, b deux nombres réels strictement positifs, on considère les intégrales

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} \quad \text{et} \quad J(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$$

7) Justifier que les intégrales $I(a, b)$ et $J(a, b)$ convergent, puis que $J(a, b) = 2I(a, b)$.
8) En effectuant le changement de variable $t = \dfrac{1}{2}\left(s - \dfrac{ab}{s}\right)$, montrer que

$$J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 2I(a, b)$$

9) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I(a_n, b_n) = I(a, b)$$

10) a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I(a_n, b_n) = I(M(a, b), M(a, b))$.

On pourra, pour tout entier naturel n, considérer les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(a_n^2+t^2)(b_n^2+t^2)}}$.

b) En déduire que

$$I(M(a, b), M(a, b)) = I(a, b)$$

11) Conclure que

$$M(a, b) = \frac{\pi}{2I(a, b)}$$

Partie III

12) On fixe $x > 0$. En effectuant le changement de variable $t = \dfrac{x}{s}$, montrer que

$$I(1,x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}\,dt$$

13) Montrer que $I(1,x) - 2\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt$ est négligeable devant $2\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt$ quand x tend vers 0^+.

14) Dériver $t \mapsto \ln(t+\sqrt{1+t^2})$ et en déduire une expression réduite pour $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt$.

15) Déterminer un équivalent simple de $I(1,x)$ en $x = 0^+$ et en déduire que

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln(x)}$$

16) Pour $x > 0$, déterminer une relation simple entre x, $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$ et en déduire que

$$f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2\ln(x)}$$

Partie IV

17) Soit $x > 0$, montrer que

$$I(1,x) = \frac{2}{1+x} I\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

18) On définit la suite (w_n) par $w_0 = x$ et $w_{n+1} = \dfrac{2\sqrt{w_n}}{1+w_n}$.

a) Montrer que la suite (w_n) converge vers 1.

b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I(1,x) = I(1, w_{n+1}) \prod_{k=0}^{n} \frac{2}{1+w_k}$$

c) Soit la suite (p_n) définie par

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{1+w_k}{2}$$

Montrer que la suite (p_n) converge vers une limite ℓ non nulle, puis exprimer de manière simple $I(1,x)\ell$.

Partie V

On définit la fonction K par

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}\,dt$$

19) Montrer que la fonction K est bien définie sur $]-1,1[$.

20) En effectuant un changement de variable, montrer que

$$I(1,x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{x^2\cos^2(t) + \sin^2(t)}}$$

21) Montrer que si $x \in]0,1]$, on a

$$I(1,x) = K(\sqrt{1-x^2})$$

22) On définit la suite d'intégrales (W_n) par

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\ dt$$

a) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} W_n$$

On pourra considérer la quantité $W_n - W_{n+1}$.

b) Démontrer que

$$W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi$$

On admet que pour tout réel $t \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n t^n \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

23) Démontrer que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \sin^{2n}(t)$$

24) Justifier que, pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$K(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((2n)!)^2}{16^n (n!)^4} x^{2n}$$

25) En déduire une expression de $M(3,5)$ à l'aide de la somme d'une série numérique.