1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -8 & -3 & -4 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de A.

Corrigé

Soit $\lambda \in \mathbf{K}$, on a

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ -8 & -3-\lambda & -4 \\ 6 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda-2)(\lambda-1)^2.$$

On en déduit que $\mathsf{Sp}(A) = \{1, 2\}$.

— Pour déterminer $E_1(A)$, on étudie $A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -8 & -4 & -4 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Elle est de rang 1. On en déduit que $\dim E_1(A) = 2$ et, par exemple,

$$E_1(A) = \mathsf{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

— Pour déterminer $E_2(A)$, on étudie $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -8 & -5 & -4 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Elle est de rang 2. On en déduit que $\dim E_1(A) = 1$ et, en résolvant le système, on trouve que

$$E_2(A) = \mathsf{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

(b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Corrigé

La matrice A est donc diagonalisable. Elle est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. (a) Soit $n \geqslant 2$. On pose $B = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où, pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$, $a_{ij} = 1$. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres associés. On précisera une base des espaces propres.

Corrigé

La matrice B est de rang 1. On en déduit que 0 est valeur propre et que son espace propre associé $E_0(A) = \mathsf{Ker}\, B$ est de dimension $n - 1$. On peut en exhiber une base :

$$\mathsf{Ker}\, B = \mathsf{Vect}(X_1, \ldots, X_{n-1})$$

où $X_i = E_i - E_{i-1}$ en posant $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$ (identifié à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$). On remarque de plus que si on pose $Y = E_1 + \cdots + E_n$ alors $BY = nY$. De ce fait, n est valeur propre et $E_n(A) = \mathsf{Vect}(Y)$ puisque $E_0(A)$ est de dimension $n - 1$.
Notons que A est donc diagonalisable.