Exercice 1 :

1) Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Soit $g_t : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{t+x}$. Comme g_t est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et comme $f_0(x) \in \mathbb{R}^+$, la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ est bien définie avec $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}(t) = g_t(f_n(t))$.
Si $t = 0$, la suite $(f_n(t))$ est la suite nulle, qui converge vers

$$\boxed{f(0) = 0}$$

Dans la suite de cette question, on suppose que $t > 0$.
Posons $h_t : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto g_t(x) - x$. Par croissance stricte de la fonction $u \mapsto u^2$ sur $\mathbb{R}^+$, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $h_t(x)$ est, au sens strict, du signe de $\sqrt{t+x}^2 - x^2 = t + x - x^2$. Le discriminant de ce trinôme du second degré en x est $1 + 4t$ et ses racines sont $\frac{-1\pm\sqrt{1+4t}}{-2} = \frac{1\mp\sqrt{1+4t}}{2}$.
La plus petite des racines est strictement négative.
On en déduit que $h_t(x)$ est strictement positif (du signe de $-(-1)$) sur $[0, \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}[$, nul en $\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$ et strictement négatif au delà.
L'intervalle $[0, \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}[$ étant stable par g_t et contenant $f_0(x)$, la suite $(f_n(t))$ est (par récurrence) à valeurs dans cette intervalle. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(t) - f_n(t) = h_t(f_n(t)) > 0$.
La suite $(f_n(t))$ est ainsi (strictement) croissante et majorée (par $\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$), donc converge vers une limite $f(t)$.
De plus, par passage à la limite dans la relation $f_{n+1}(t) - f_n(t) = h_t(f_n(t))$ et par continuité de h_t, on a

$$f(t) - f(t) = h_t(f(t))$$

(car la suite $(f_{n+1}(t))$, étant extraite de $(f_n(t))$, converge vers $f(t)$)
Ainsi, puisque h_t ne s'annule qu'en $\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$, on a

$$\boxed{f(t) = \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2} \quad \text{(si } t > 0}$$

2) La convergence de la suite (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$, car sinon, les f_n étant continues, f le serait également, ce qui n'est pas le cas puisque

$$\lim_{t\mapsto 0^+} f(t) = 1 \neq 0 = f(0).$$

3) Soit $t > 0$.

$$\begin{aligned}
|f_{n+1}(t) - f(t)| &= |g_t(f_n(t)) - g_t(f(t))| \\
&= |\sqrt{t+f_n(t)} - \sqrt{t+f(t)}| \\
&= \left|\frac{(t+f_n(t)) - (t+f(t))}{\sqrt{t+f_n(t)} + \sqrt{t+f(t)}}\right| \\
&= \left|\frac{(t+f_n(t)) - (t+f(t))}{f_{n+1}(t) + f(t)}\right| \\
&\leqslant \frac{|f_n(t) - f(t)|}{2f_{n+1}(t)}
\end{aligned}$$

car $0 < f_{n+1}(t) \leqslant f(t)$.

4) Soit $a > 0$.

Pour tout $t \in [a, +\infty[$, et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} |f_{n+1}(t) - f(t)| & \leqslant & \dfrac{|f_n(t) - f(t)|}{2f_{n+1}(t)} \\ & \leqslant & \dfrac{|f_n(t) - f(t)|}{2f_{n+1}(a)} \end{array}$$

car une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $2f_{n+1}(a) \underset{n\to\infty}{\to} 2f(a) = 1 + \sqrt{1+4a} > 1$, choisissant $k \in]1, 2f(a)[$ (un tel k existe), il existe un entier N tel que

$$\forall n \geqslant N,\ 2f_{n+1}(a) \geqslant k.$$

Par récurrence immédiate, pour tout $n \geqslant N$ et tout $t \in [a, +\infty[$,

$$|f_n(t) - f(t)| \leqslant \frac{|f_N(t) - f(t)|}{k^{n-N}}$$

Enfin, quitte à remplacer N par 1 si $N = 0$, on a pour tout $t \in [a, +\infty[$

$$\begin{array}{rcl} |f_N(t) - f(t)| & = & f(t) - f_N(t) \\ & \leqslant & f(t) - f_1(t) \\ & = & \dfrac{\sqrt{1+4t} - 2\sqrt{t}}{2} \\ & = & \dfrac{1 + 4t - 4t}{2(\sqrt{t} + \sqrt{1+4t})} \\ & \leqslant & \dfrac{1}{2\sqrt{a}} \end{array}$$

Ainsi pour tout $n \geqslant N$ et tout $t \in [a, +\infty[$:

$$|f_n(t) - f(t)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}k^{n-N}}$$

On a donc pour tout $n \geqslant N$:

$$||f_n - f||_{\infty, [a, +\infty[} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}k^{n-N}}$$

Comme $k > 1$, on a par encadrement :

$$||f_n - f||_{\infty, [a, +\infty[} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

ce qui montre que (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$.

Exercice 2 :

1) — D'après le cours la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$. On en déduit que l'ensemble de définition de la fonction ζ est $]1, +\infty[$.

— Etudions l'ensemble de définition de la fonction η. Il est clair que pour $x \leqslant 0$ la série diverge grossièrement. A l'inverse pour $x > 0$ la série va converger car elle relève du théorème des séries alternées. En effet

— Soit $n \geqslant 1$, $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} . \frac{(-1)^n}{(n+1)^x} \leqslant 0$.

— La suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)$ décroit.

— La suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)$ tend vers 0.

On en déduit que l'ensemble de définition de η est $]0,+\infty[$.

On remarque que pour $x>1$ la série définissant η converge absolument.

2) a) Soit $x>1$. La série qui définit η converge absolument. On a alors

$$\begin{aligned}\eta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} &= \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}\frac{1}{n^x}-\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}\frac{1}{n^x}\\ &= \sum_{n=1}\frac{1}{n^x}-2\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}\frac{1}{n^x}\\ &= \zeta(x)-2\sum_{p=1}\frac{1}{(2p)^x}\\ &= \left(1-\frac{1}{2^{x-1}}\right)\zeta(x)\end{aligned}$$

b) Soit $a>1$. Montrons que la série définissant ζ converge uniformément sur $[a,+\infty[$. On note $f_n : x\mapsto \frac{1}{n^x}$. Pour tout entier $n\geqslant 1$, f_n est décroissante donc $||f_n||_{\infty,[a,+\infty[}=\dfrac{1}{n^a}$. Or la série $\left(\sum \dfrac{1}{n^a}\right)$ converge donc la série de fonctions converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$.

c) Déterminons la limite de $\zeta(x)$ quand $x\longrightarrow+\infty$. On utilise le théorème de la double limite pour les séries.

— On vient de voir à la question b) que la série de fonctions qui défini ζ converge uniformément sur $[2,+\infty[$ (par exemple).

— Pour tout entier n,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n^x}=\ell_n=\begin{cases}1 & \text{si } n=1\\ 0 & \text{si } n>1.\end{cases}$$

On en déduit que la série $\left(\sum \ell_n\right)$ converge (évident) et

$$\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=1.$$

On remarque ensuite que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2^{x-1}}=0$ donc $\eta(x)\underset{+\infty}{\sim}\zeta(x)$. De ce fait

$$\lim_{x\to+\infty}\eta(x)=1.$$

3) a) Soit $x>0$. La fonction $h_x : t\mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $t>0$,

$$h_x'(t)=\frac{t^{x-1}(1-x\ln t)}{t^{2x}}.$$

En particulier elle décroit sur $[e^{\frac{1}{x}},+\infty[$. De ce fait la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)$ est décroissante à partir de $N_x=\lfloor e^{\frac{1}{x}}\rfloor+1$.

b) Soit $n\geqslant 1$, la fonction f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f_n' : x\mapsto -\frac{\ln n}{n^x}$ car $f_n(x)=\exp(-x\ln n)$. On étudie donc la série $\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{\ln n}{n^x}\right)$. Soit $a>0$. On montre la convergence uniforme en utilisant le théorème spécial sur les séries alternées.

— Pour $x \geqslant a$, la série $\left(\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \frac{\ln n}{n^x}\right)$ est alternée.

— Pour $x \geqslant a$, la valeur absolue du terme général est décroissante à partir du rang N_x et donc à partir de N_a d'après la question a)

— Pour $x \geqslant a$, la valeur absolue du terme général tend vers 0 par croissances comparées car $x > 0$.

On en déduit que la série relève du théorème spécial sur les séries alternées. De ce fait on peut majorer le reste. Pour $N \geqslant N_a$,

$$\left|\sum_{n\geqslant 1}^{N}(-1)^n \frac{\ln n}{n^x} - \sum_{n\geqslant 1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n^x}\right| = \left|\sum_{n\geqslant N+1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n^x}\right| \leqslant \frac{\ln(N+1)}{(N+1)^x} \leqslant \frac{\ln(N+1)}{(N+1)^a}.$$

Ceci étant vrai pour tout x de $[a, +\infty[$, on en déduit que la série converge uniformément.

c) Appliquons le théorème de dérivation terme à terme à la série $\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)$.

— Les fonctions $x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$

— La série de fonction $\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers η.

— La série de fonctions des dérivées converge uniformément sur tous les intervalles $[a, +\infty[$ donc, à fortiori, sur tous les segments de $]0, +\infty[$.

On en déduit que η est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty$ et que pour tout $x > 0$:

$$\eta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}.$$

d) On a vu en 2.a) que pour $x > 1$, $\zeta(x) = \frac{1}{1-2^{1-x}}\eta(x)$.

Maintenant comme η est de classe $\mathscr{C}^1$, la formule de Taylor-Young en 1 nous donne

$$\eta(x) = \eta(1) + \eta'(1)(x-1) + \underset{x\to 1}{o}(x-1)$$

De plus

$$1 - 2^{1-x} = 1 - \exp(-(x-1)\ln 2) = (x-1)\ln 2 - \frac{(x-1)^2 \ln^2 2}{2} + \underset{x\to 1}{o}((x-1)^2)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\zeta(x) &= \frac{1}{(x-1)\ln 2} \times \frac{\eta(1) + \eta'(1)(x-1) + o(x-1)}{1 - \frac{(x-1)\ln 2}{2} + o((x-1))} \\
&= \frac{1}{(x-1)\ln 2}\left(\eta(1) + \eta'(1)(x-1) + o(x-1)\right)\left(1 + \frac{(x-1)\ln 2}{2} + o((x-1))\right) \\
&= \frac{1}{(x-1)\ln 2}\left(\eta(1) + \left(\eta'(1) + \frac{\ln 2}{2}\right)(x-1) + o(x-1)\right) \\
&= \frac{a}{x-1} + b + \underset{x\to 1}{o}(1)
\end{aligned}$$

en posant

$$a = \frac{\eta(1)}{\ln 2} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{2} + \frac{\eta'(1)}{\ln 2}$$

Remarque : On peut montrer que $a = 1$ (c'est-à-dire que $\eta(1) = \ln 2$) et que $b = \gamma$ la constante d'Euler.