I Premiers résultats

1) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice 1. Alors $0_{\mathscr{L}(E)} = u^1 = u$. Réciproquement, l'endomorphisme nul est nilpotent d'ordre 1 en dimension non nulle (car $\mathsf{id}_E \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ lorsque E n'est pas réduit à son zéro).

I.A - Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

2) On sait que $u = u^1 \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ car u est nilpotent d'indice 2. Donc il existe un vecteur x de E tel que $u(x) \neq 0$.
3) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha x + \beta u(x) = 0_E$.
   Alors $0_E = u(0_E) = \alpha u(x) + \beta u^2(x) = \alpha u(x) + 0_E$. Comme $u(x) \neq 0_E$, on a $\alpha = 0_{\mathbb{C}}$.
   Ainsi $0_E = \alpha x + \beta u(x) = 0_E + \beta u(x)$. Comme $u(x) \neq 0_E$, on a $\beta = 0_{\mathbb{C}}$.
   La famille $\mathscr{B} = (x, u(x))$ est donc libre. Étant de longueur $2 = \dim(E)$, c'est une base de E.
4) On voit que $\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = J_2$ car elle a pour colonnes $\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(u(x)) = \binom{0}{1}$ et $\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(u(u(x))) = \binom{0}{0}$.
5) Soit A une matrice nilpotente et $u : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $E = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associé.
   L'endomorphisme u est nilpotent et son indice de nilpotence est au plus 2 car $\dim E = 2$. D'après les questions précédentes, il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est nulle ou égale à J_2. Ainsi A est nulle ou semblable à J_2, donc a même trace et même déterminant que la matrice nulle ou que J_2. Dans les deux cas, $\mathrm{Tr}(A) = 0 = \det(A)$.
   Réciproquement, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ est de trace nulle et de déterminant $-a^2 - bc$ nul, de ce fait, $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab - ba \\ ca - ac & cb + a^2 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle donc A est nilpotente.
   On peut aussi utiliser que si A est de matrice de trace nulle et de déterminant nul alors $\chi_A = X^2$. On en déduit que A est nilpotente par le théorème de Cayley - Hamilton.

I.B - Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n \geqslant 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang r.

6) Soit $y \in \mathsf{Im}(u)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$, donc $u(y) = u^2(x) = 0_E$ donc $y \in \mathsf{Im}(u)$. Ainsi $\mathsf{Im}(u) \subset \mathsf{Ker}(u)$.
   Par le théorème du rang,
   $$n = \dim \mathsf{Im}(u) + \dim \mathsf{Ker}(u) \geqslant \dim \mathsf{Im}(u) + \dim \mathsf{Im}(u) = 2r$$
7) On suppose que $\mathsf{Im}(u) = \mathsf{Ker}(u)$. Par le théorème du rang, on a $n = 2r$.
   Soit $(y_1, \ldots, y_r)$ une base de $\mathsf{Im}(u)$ et $e_1, \ldots, e_r$ des antécédents de $y_1, \ldots, y_r$ par u.
   Soient $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \ldots, \beta_r \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha_1 e_1 + \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_r y_r = 0_E$. Alors
   $$0_E = u(0_E) = \alpha_1 y_1 + \beta_1 0_E + \ldots + \alpha_r y_r + \beta_r 0_E$$

Comme $(y_1,\dots,y_r)$ est libre, $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_r=0_{\mathbb{C}}$.

Ainsi $0_E=0_E+\beta_1 y_1+0_E+\beta_2 y_2+\dots+0_E+\beta_r y_r$.

Comme $(y_1,\dots,y_r)$ est libre, $\beta_1=\beta_2=\dots=\beta_r=0_{\mathbb{C}}$.

Ainsi $(e_1,y_1,\dots,e_r,y_r)$ est libre. Etant de longueur $2r=n=\dim E$, c'est une base de E.

8) La matrice de u dans cette base est $\operatorname{diag}(J_2,J_2,\dots,J_2)$.

9) Dans les mêmes notations que précédemment, la famille $\mathscr{F}=(e_1,y_1,\dots,e_r,y_r)$ reste libre, mais le sous-espace vectoriel F qu'elle engendre n'est pas E.

Montrons que $E=F+\mathsf{Ker}(u)$.

Soit $x\in E$ et $y=u(x)$. Il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_r\in\mathbb{C}$ tels que $y=\lambda_1 y_1+\dots+\lambda_r y_r$. Notons $x'=\lambda_1 e_1+\dots+\lambda_r e_r$.

$u(x-x')=u(x)-u(x')=y-y=0_E$ donc $x-x'\in\mathsf{Ker}(u)$. De plus $x'\in F$. Donc comme $x=x'+(x-x')$, $x\in F+\mathsf{Ker}(u)$. Ainsi $E\subset F+\mathsf{Ker}(u)$. L'inclusion réciproque est triviale.

Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de $\mathsf{Ker}(u)$ et soit $\mathcal{E}$ la concaténée de $\mathscr{F}$ et de $\mathcal{G}$. Comme $E=F+\mathsf{Ker}(u)$, $\mathcal{E}$, qui est finie, engendre E .

Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\mathscr{F}$ en une base $\mathscr{B}$ de E à l'aide de termes $v_1,\dots,v_{n-2r}$ de $\mathcal{E}$. Aucun des v_i n'est terme de $\mathscr{F}$ (sinon $\mathscr{B}$ serait liée) donc tous les v_i sont termes de $\mathcal{G}$ donc appartiennent à $\mathsf{Ker}(u)$.

10) La matrice de u dans cette base est $\operatorname{diag}(J_2,\dots,J_2,J_1,\dots,J_1)$ avec r blocs J_2 et $n-2r$ blocs J_1.

II Deuxième partie

11) Pour tout $x\in E$, $u(x)\in\mathsf{Im}(u)$. En particulier, pour tout $x\in\mathsf{Im}(u)$, $u(x)\in\mathsf{Im}(u)$. Donc $\mathsf{Im}(u)$ est stable par u. Soit $\check{u}$ l'endomorphisme de $\mathsf{Im}(u)$ induit par u.

Soit $y\in\mathsf{Im}(u)$. Soit x un antécédent de y par u. $0_E=u^p(x)=u^{p-1}(u(x))=u^{p-1}(y)=\check{u}^{p-1}(y)$. Donc $\check{u}^{p-1}=0_{\mathscr{L}(\mathsf{Im}(u))}$.

De plus, il existe $x\in E$ tel que $u^{p-1}(x)\neq 0_E$. Notant $y=u(x)$, on a $\check{u}^{p-2}(y)=u^{p-1}(x)\neq 0_E$. Donc $\check{u}^{p-2}\neq 0_{\mathscr{L}(\mathsf{Im}(u))}$.

Ainsi $\check{u}$ est nilpotent d'indice $p-1$.

12) Soit x un vecteur non nul de E Soit $x'\in C_u(x)$. Il existe $K\in\mathbb{N}$ et $\lambda_0,\dots,\lambda_K\in\mathbb{C}$ tels que $x'=\sum_{k=0}^K\lambda_k u^k(x)$ car x' est combinaison linéaire d'un nombre fini des $u_k(x),\ k\in\mathbb{N}$.

$u(x')=\sum_{k=0}^K\lambda_k u^{k+1}(x)\in C_u(x)$.

Donc $C_u(x)$ est stable par u.

L'ensemble $\{k\in\mathbb{N}^*,\ u^k(x)=0_E\}$ est inclus dans $\mathbb{N}$ et n'est pas vide car il contient p. Il a donc un plus petit élément, qu'on note $s(x)$.

13) Notons $\mathscr{B}_x=\big(x,u(x),\dots,u^{s(x)-1}(x)\big)$.

Soient $\lambda_0,\dots,\lambda_{s(x)-1}\in\mathbb{C}$ tels que $\lambda_0 x+\lambda_1 u(x)+\dots+\lambda_{s(x)-1}u^{s(x)-1}(x)=0_E$.

En considérant les images des deux membres par u, u^2,...,$u^{s(x)-1}$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda_0 x+\lambda_1 u(x)+\ldots+\lambda_{s(x)-1}u^{s(x)-1}(x) & = & 0_E\\ \lambda_0 u(x)+\ldots+\lambda_{s(x)-2}u^{s(x)-1}(x) & = & 0_E\\ \ldots & & \\ \lambda_0 u^{s(x)-2}(x)+\lambda_1 u^{s(x)-1}(x) & = & 0_E\\ \lambda_0 u^{s(x)-1}(x) & = & 0_E\end{array}\right.$$

Comme $u^{s(x)-1}(x)$ n'est pas nul, on déduit de la dernière égalité que $\lambda_0=0$, puis de l'avant dernière que $\lambda_1=0$, ..., et enfin de la première égalité que $\lambda_{s(x)-1}=0$.

Donc $\mathscr{B}_x$ est libre.

Enfin, tout élément de $C_u(x)$ est combinaison linéaire d'un nombre fini des $u^k(x)$, et les $u^k(x)$ sont nuls pour $k\geqslant s(x)$, donc tout élément de $C_u(x)$ est combinaison linéaire de $\mathscr{B}_x$.

Donc $\mathscr{B}_x$ est une base de $C_u(x)$.

L'endomorphisme de $C_u(x)$ induit par u a pour matrice $J_{s(x)}$ dans la base $\mathscr{B}_x$.

14) On se propose de démontrer par récurrence sur p qu'il existe des vecteurs $x_1,\ldots,x_t$ de E tels que $E=\bigoplus_{i=1}^{t}C_u(x_i)$.

   a) Initialisons la récurrence au rang $p=1$. Si u nilpotent d'indice 1, $E=\bigoplus_{i=1}^n C_u(x_i)$ où $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E, car les $C_u(x_i)$ sont les droites vectorielles engendrées par les x_i.

   b) Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On suppose la propriété à démontrer vraie au rang p. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice $p+1$ d'un espace vectoriel E de dimension finie. On note $\breve{u}$ l'endomorphisme de $\mathsf{Im}(u)$ induit par u.

      i) Par la question 11, $\breve{u}$ est nilpotent d'indice p donc, par hypothèse de récurrence, il existe des vecteurs $y_1,\ldots,y_s$ de $\mathsf{Im}(u)$ tels que $\mathsf{Im}(u)=\bigoplus_{i=1}^s C_{\breve{u}}(y_i)$.

      ii) Soient $x_1,\ldots,x_s$ des antécédents de $y_1,\ldots,y_s$ par u.
      Soient $x_1'\in C_u(x_1),\ldots,x_s'\in C_u(x_s)$ tels que $x_1'+\ldots+x_s'=0_E$.
      Alors $u(x_1')+\ldots+u(x_s')=u(0_E)=0_E$. De plus, pour tout $i\in[\![1,s]\!]$, x_i' est combinaison linéaire des $u^k(x_i)$ $(k\in\mathbb{N})$ donc $u(x_i')$ est combinaison linéaire des $u(u^k(x_i))=u^k(u(x_i))=u^k(y_i)$ et par conséquent $u(x_i')\in C_u(y_i)=C_{\breve{u}}(y_i)$.
      Comme les $C_{\breve{u}}(y_i)$ sont en somme directe, on a $\forall i\in[\![1,s]\!],\ u(x_i')=0_E$.
      Or x_i' s'écrit $\lambda_{i,0}x_i+\lambda_{i,1}u(x_i)+\ldots+\lambda_{i,s(x_i)-1}u^{s(x_i)-1}(x_i)$ pour certains complexese $\lambda_{i,0},\ldots$ avec $s(x_i)=s(y_i)+1$.

$$\begin{array}{rcl}0_E & = & u(x_i')\\ & = & \lambda_{i,0}u(x_i)+\lambda_{i,1}u^2(x_i)+\ldots+\lambda_{i,s(x_i)-2}u^{s(x_i)-1}(x_i)+0\\ & = & \lambda_{i,0}y_i+\lambda_{i,1}u(y_i)+\ldots+\lambda_{i,s(x_i)-2}u^{s(y_i)-1}(y_i)\end{array}$$

      et comme $(y_i,\ldots,u^{s(y_i)-1}(y_i))$ est libre, $\lambda_{i,0}=\ldots=\lambda_{i,s(x_i)-2}=0$ et donc

$$x_i'=\lambda_{i,s(x_i)-1}u^{s(x_i)-1}(x_i)\in C_u(y_i)$$

Comme les $C_u(y_i)$ sont en somme directe, les x'_i sont tous nuls.

Donc les $C_u(x_i)$ sont en somme directe.

Soit $x \in E$. Alors $u(x) \in \mathsf{Im}(u) = \sum_{i=1}^{s} C_u(y_i)$ donc il existe $y'_1 \in C_u(y_1), \ldots, y'_s \in C_u(y_s)$ tels que $u(x) = y'_1 + \ldots + y'_s$.

Pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, y'_i s'écrit $\lambda_{i,0} y_i + \ldots + \lambda_{s(y_i)-1} u^{s(y_i)-1}(y_i)$. Posant $x'_i = \lambda_{i,0} x_i + \ldots + \lambda_{s(y_i)-1} u^{s(y_i)-1}(x_i)$, on a $x'_i \in C_u(x_i)$ et $u(x'_i) = y'_i$.

Posons enfin $x' = x'_1 + \ldots + x'_s$.

Alors $x' \in \sum_{i=1}^{s} C_u(x_i)$ et $u(x') = \sum_{i=1}^{s} y'_i = u(x)$ et donc $u(x - x') = 0_E$ c'est-à-dire $x - x' \in \mathsf{Ker}(u)$.

Comme $x = (x - x') + x'$, on a $x \in \mathsf{Ker}(u) + \sum_{i=1}^{s} C_u(x_i)$.

Donc $E \subset \mathsf{Ker}(u) + \bigoplus_{i=1}^{s} C_u(x_i)$. L'inclusion réciproque est triviale.

iii) La famille $\mathscr{F} = (x_1, u(x_1), \ldots, u^{s(x_1)-1}(x_1), \ldots, x_s, \ldots, u^{s(x_s)-1}(x_s))$ est une base de $\bigoplus_{i=1}^{s} C_u(x_i)$ car les $C_u(x_i)$ sont en somme directe et car pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $(x_i, \ldots, u^{s(x_i)-1}(x_i))$ est une base de $C_u(x_i)$.

En lui concaténant une famille génératrice finie de $\mathsf{Ker}(u)$, on obtient une famille génératrice finie $\mathcal{G}$ de E car $E = \mathsf{Ker}(u) + \bigoplus_{i=1}^{s} C_u(x_i)$.

On peut donc compléter la famille libre $\mathscr{F}$ par des termes de $\mathcal{G}$ pour obtenir une base $\mathscr{B}$ de E. Aucun des termes $v_1, \ldots, v_q$ ajoutés lors de cette complétion ne peut être terme de $\mathscr{F}$ car $\mathscr{B}$ est libre, donc tous sont termes de $\mathcal{G}$ donc appartiennent à $\mathsf{Ker}(u)$.

Par le théorème de la base adaptée, on a

$$E = \mathsf{Vect}(v_1) \oplus \ldots \oplus \mathsf{Vect}(v_q) \oplus \bigoplus_{i=1}^{s} C_u(x_i) = C_u(v_1) \oplus \ldots \oplus C_u(v_q) \oplus \bigoplus_{i=1}^{s} C_u(x_i)$$

car pour tout $j \in [\![1, q]\!]$, $C_u(v_j) = \mathsf{Vect}(v_j)$ car $v_j \neq 0_E$ et $u(v_j) = 0_E$.

Donc la propriété à démontrer est vraie au rang $p + 1$ (avec $t = s + q$).

Par récurrence, elle est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

15) Dans la base $(x_1, u(x_1), \ldots, u^{s(x_1)-1}(x_1), \ldots, x_t, \ldots, u^{s(x_t)-1}(x_t))$, la matrice de u est $\mathrm{diag}(J_{s(x_1)}, \ldots, J_{s(x_t)})$.

16) Soit $x \in E$ et $\lambda_{1,0}, \ldots, \lambda_{1,s(x_1)-1}, \ldots, \lambda_{t,0}, \ldots, \lambda_{t,s(x_t)-1}$ ses coordonnées dans la base précédente.
Dans la même base, $u(x) = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=0}^{s(x_i)-2} \lambda_{i,j} u^{j+1}(x_i)$.
$u(x) = 0_E$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, t]\!]\ \forall j \in [\![0, s(x_i) - 2]\!]\quad \lambda_{i,j} = 0$.
Ainsi $\mathsf{Ker}(u)$ a pour base $(u^{s(x_i)-1}(x_i))_{1 \leqslant i \leqslant t}$ donc sa dimension est t.