La partie I de ce problème permet de démontrer quelques résultats sur les matrices et les endomorphismes nilpotents et aborde l'étude de cas particuliers qui seront généralisés dans la partie II.

Notations et rappels

Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

On pose $J_1 = (0)$ et, pour un entier $q \geqslant 2$, $J_q = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_q(\mathbb{C})$.

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathscr{M}_m(\mathbb{C})$, on note $\operatorname{diag}(A, B)$, la matrice diagonale par blocs

$$\operatorname{diag}(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+m}(\mathbb{C}).$$

Plus généralement, si $A_1 \in \mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathscr{M}_{n_2}(\mathbb{C}), \cdots, A_k \in \mathscr{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, on note

$$\operatorname{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n_1+n_2+\cdots+n_k}(\mathbb{C}).$$

I Premiers résultats

1) Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

I.A - Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2.

2) Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $u(x) \neq 0$.
3) Vérifier que la famille $(x, u(x))$ est une base de E.
4) Quelle est la matrice de u dans cette base ?
5) En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace et déterminant nuls.

I.B - Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n \geqslant 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang r.

6) Montrer que $\mathsf{Im}(u) \subset \mathsf{Ker}(u)$ et que $2r \leqslant n$.
7) On suppose que $\mathsf{Im}(u) = \mathsf{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_r$ de E tels que la famille $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r)\big)$ est une base de E.

8) Donner la matrice de u dans cette base.

9) On suppose $\mathsf{Im}(u) \neq \mathsf{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_r$ de E et des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_{n-2r}$ appartenant à $\mathrm{Ker}(u)$ tels que $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \ldots, v_{n-2r}\big)$ est une base de E.

10) Quelle est la matrice de u dans cette base ?

II Deuxième partie

On cherche dans cette partie à généraliser les résultats des sous-parties I.A et I.B.

On suppose $n \geqslant 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geqslant 2$.

11) Démontrer que $\mathsf{Im}(u)$ est stable par u et que l'endomorphisme induit par u sur $\mathsf{Im}(u)$ est nilpotent.
Préciser son indice de nilpotence.

12) Pour tout vecteur x non nul de E, on note $C_u(x)$ l'espace vectoriel engendré par les $\big(u^k(x)\big)_{k \in \mathbb{N}}$; démontrer que $C_u(x)$ est stable par u et qu'il existe un plus petit entier $s(x) \geqslant 1$ tel que $u^{s(x)}(x) = 0$.

13) Démontrer que $\big(x, u(x), \ldots, u^{s(x)-1}(x)\big)$ est une base de $C_u(x)$ et donner la matrice, dans cette base, de l'endomorphisme induit par u sur $C_u(x)$.

14) On se propose de démontrer par récurrence sur p qu'il existe des vecteurs $x_1, \ldots, x_t$ de E tels que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.

   a) Initialiser la récurrence.

   b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose la propriété à démontrer vraie au rang p. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice $p+1$ d'un espace vectoriel E de dimension finie. On note $\breve{u}$ l'endomorphisme de $\mathsf{Im}(u)$ induit par u.

      i) Justifier qu'il existe des vecteurs $y_1, \ldots, y_s$ de $\mathsf{Im}(u)$ tels que $\mathsf{Im}(u) = \bigoplus_{i=1}^{s} C_{\breve{u}}(y_i)$.

      ii) Soient $x_1, \ldots, x_s$ des antécédents de $y_1, \ldots, y_s$ par u. Montrer que $C_u(x_1), C_u(x_2), \ldots, C_u(x_s)$ sont en somme directe et que :

$$E = \mathsf{Ker}(u) + \bigoplus_{i=1}^{s} C_u(x_i)$$

      iii) Conclure

15) Donner la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.

16) Justifier que $t = \dim(\mathsf{Ker}(u))$.