Exercice I

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie notée n.
Soit f un endomorphisme non nul de E tel qu'il existe un entier $p > 1$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)} \neq f^{p-1}$ (p est l'indice de nilpotence de f).

1) Déterminer les réels $a_1, \ldots, a_{p-1}$ tels que $\sqrt{1+x} = 1 + a_1 x + \ldots + a_{p-1}x^{p-1} + \ \mathrm{o}_{x\to 0}(x^{p-1})$.
   Exprimer ces coefficients à l'aide de factorielles.
   Dans la suite, on notera P_p le polynôme $1 + a_1 X + \ldots + a_{p-1}X^{p-1}$.
2) Que dire de $1 + x - P_p^2(x)$ quand x tend vers 0 ? En déduire (justifier avec soin) que le polynôme $1 + X - P_p^2$ est divisible par X^p.
3) Montrer que le polynôme minimal de f, noté Π_f, est égal à X^p (on citera précisément tous les théorèmes et définitions utilisés pendant le raisonnement).
4) Montrer qu'en posant $g = P_p(f)$, on a $g^2 = id_E + f$.
5) **Application numérique :**
   On pose $A = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 2 \\ -3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice B telle que $B^2 = I_3 + A$.
   (montrer que A est nilpotente, déterminer son indice de nilpotence p, et appliquer numériquement l'algorithme présenté ci-dessus)
6) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est libre.
   En déduire que $p \leqslant n$ et que $f^n = 0$.
7) Montrer que s'il existe un endomorphisme g de E tel que $g^2 = f$, alors $2p - 1 \leqslant n$.

Exercice II

Dans le problème, n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2
Le module d'un nombre complexe z est noté $|z|$.
$\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ (resp. $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$) désigne l'espace des matrices à n lignes et m colonnes, à coefficients dans $\mathbb{C}$ (resp. dans $\mathbb{R}$).
$\mathbb{C}^n$ est identifié à l'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ des matrices colonnes à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{C}$.
Les coefficients d'un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ sont notés $x_1, \ldots, x_n$. Dans tout le problème, $\mathbb{C}^n$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Pour tous $x \in \mathbb{C}^n$ et $y \in \mathbb{C}^n$, la matrice ${}^t xy \in \mathscr{M}_1(\mathbb{C})$ est identifiée au nombre complexe $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
Lorsque $m = n$, on utilisera la notation $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (resp $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) pour $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ (resp $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$).
La matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

sera notée $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|M\| = \sup_{x\in\mathbb{C}^n,\ \|x\|_1=1} \|Mx\|_1 = \sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1}. \qquad (1)$$

Le rayon spectral de M, noté $\rho(M)$, est défini comme le maximum des modules des valeurs propres de M :

$$\rho(M) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\}.$$

1) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$,, $z \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$. Etablir les relations suivantes :
   a) $\rho(zA) = |z|\rho(A)$.
   b) $\rho(A^k) = \rho(A)^k$.
   c) $\rho(A) \leqslant \|A\|$.
   d) $\rho(A)^k \leqslant \|A^k\|$.
2) a) Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et tout nombre réel $C > 0$, montrer l'équivalence

$$\|M\| \leqslant C \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}^n : \|Mx\|_1 \leqslant C\|x\|_1.$$

   b) Montrer que l'application $M \mapsto \|M\|$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
3) Montrer que pour $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\quad \|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.
4) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{i,j}$ le coefficient de A d'indice de ligne i et d'indice de colonne j. Montrer que

$$\|A\| = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|\right).$$

5) On considère dans cette question une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

   On suppose que

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad |a_{i,i}| < 1.$$

   Pour tout réel $b > 0$, on pose $P_b = \mathrm{Diag}(1, b, b^2, \ldots, b^{n-1}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   a) Calculer $P_b^{-1}AP_b$. Que se passe-t-il lorsqu'on fait tendre b vers 0 ?
   b) Montrer qu'il existe $b > 0$ tel que

$$\|P_b^{-1}AP_b\| < 1.$$

   c) En déduire que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

   Dans les questions 6 à 8, on considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
6) Montrer que si $\rho(A) < 1$, alors la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
7) On définit la partie de $\mathbb{R}_+$

$$E_A = \left\{\alpha > 0 \mid \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{A}{\alpha}\right)^k = 0\right\}.$$

   Montrer que $E_A =]\rho(A), +\infty[$.
8) Montrer la formule

$$\lim_{k\to+\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A).$$