Problème I

Partie 1 : exemples

1) Notons, $u_n : x \mapsto \frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)$.
On a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right| \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$$
Donc $||u_n||_\infty \leqslant \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^n}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$ converge puisque que c'est la somme de deux séries géométriques convergentes. Par comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} ||u_n||_\infty$ converge. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
Pour le calcul, on remarque que pour $p \geqslant 2$, e^{ix}/p est de module < 1 et que donc (somme géométrique)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{e^{ix}}{p}} = \frac{p}{p-e^{ix}}$$
En passant aux parties réelle et imaginaire, on a donc
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p^2 - p\cos(x)}{p^2 - 2p\cos(x)+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{p^n} = \frac{p\sin(x)}{p^2-2p\cos(x)+1}$$
Il reste à combiner les résultats pour $p = 2$ et $p = 3$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right) = \frac{4-2\cos(x)}{5-4\cos(x)} + \frac{3\sin(x)}{10-6\cos(x)}$$

2) On sait que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(e^{ix}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n!}$.
Or, $\exp(e^{ix}) = \exp(\cos(x))\exp(i\sin(x))$ et la partie réelle de cette quantité est
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(\cos(x))\cos(\sin(x)) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n!}$$

3) Posons $a_n = \frac{1}{n+1}$ et $u_n(x) = a_n\cos(nx)$. La suite (a_n) est de limite nulle mais $u_n(0) = \frac{1}{n+1}$ est le terme général d'une série divergente. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ n'est donc pas simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

4) La norme infinie sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est immédiatement égale à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série divergente (séries de Riemann). La série de fonction proposée n'est donc pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : propriétés

5) Notons, $u_n : x \mapsto a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$. On a
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| \leqslant |a_n| + |b_n|$$

Donc $||u_n||_\infty \leqslant |a_n|+|b_n|$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a_n|+|b_n|$ converge puisque que c'est la somme de deux séries convergentes. Par comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} ||u_n||_\infty$ converge. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

6) Si $a = b = 0$, le résultat cherché est vrai.
Supposons $(a, b) \neq (0, 0)$. Dans ce cas, $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}(a'\cos(x) + b'\sin(x)$$

où $a' = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $b' = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Comme $(a')^2 + (b')^2 = 1$, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $a' = \cos(\varphi)$ et $b' = \sin(\varphi)$. On en déduit donc que pour tout réel x,

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}(\cos(\varphi)\cos(x) + \sin(\varphi)\sin(x)) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$$

Il en découle que le maximum (sur $\mathbb{R}$) de la fonction $x \mapsto |a\cos(x) + b\sin(x)|$ est $\sqrt{a^2+b^2}$.

7) Posons $u_n : x \mapsto a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$. D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|u_n\|_\infty = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

puisque si $n \neq 0$, la fonction $x \mapsto nx$ est surjective.
De plus, pour tout entier n, $|a_n| \leqslant \sqrt{a_n^2+b_n^2}$ et $|b_n| \leqslant \sqrt{a_n^2+b_n^2}$. On en déduit que si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \|u_n\|_\infty$ converge alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sqrt{a_n^2+b_n^2}$ puis les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a_n|$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} |b_n|$ convergent par comparaison des séries positives
Finalement $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n$ convergent absolument.

8) a) Posons $u_n : x \mapsto a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$.
On vérifie que
— Pour tout entier naturel n, la fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}$.
— La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ car elle converge normalement sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est continue.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = u_n(x+2\pi)$. On en déduit alors que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x+2\pi) = f(x+2\pi)$$

On a bien montré que $f \in C_{2\pi}$.

b) On effectue une linéarisation : $\cos^2(nx) = \frac{1}{2}(\cos(2nx)+1)$. On a donc

$$\forall n \geqslant 1,\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx = \left[\frac{1}{4n}\sin(2nx) + \frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

De même, $\sin(kx)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\sin(kx+nx)+\sin(kx-nx))$. On utilise alors que pour tout entier naturel p, $x \mapsto \sin(px)$ est d'intégrale nulle sur $[-\pi, \pi]$; c'est évident si $p = 0$ et cela découle du fait que $x \mapsto -\dfrac{\cos(px)}{p}$ est une primitive de $x \mapsto \sin(px)$ sinon. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\, dx = 0$$

c) Posons encore, pour tout entier naturel k, $u_k : x \mapsto a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\alpha_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)\cos(nx)\, dx$$

On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |u_k(x)\cos(nx)| \leqslant |u_k(x)| \leqslant \|u_k\|_\infty$$

Cela implique que $||x \mapsto u_k(x)\cos(nx)||_\infty \leqslant \|u_k\|_\infty$. On en déduit que la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} u_k(x)\cos(nx)$ (avec l'abus de notations habituel) converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.
Comme les fonctions, $x \mapsto u_k(x)\cos(nx)$ sont continues, on peut utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur le SEGMENT $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx))\, dx \right)$$

Dans la somme, tous les termes sont nuls sauf celui d'indice $k = n$ qui vaut $a_n\pi$ si $n \neq 0$ (question précédente et résultat admis) et $2\pi a_0$ si $n = 0$. Ainsi,

$$\forall n \neq 0,\ a_n = \alpha_n(f) \ \text{ et } \ a_0 = \frac{1}{2}\alpha_0(f)$$

9) a) Il s'agit d'utiliser la question précédente avec $a_0 = \alpha_0(f)/2$, $b_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$, $a_n = \alpha_n(f)$ et $b_n = \beta_n(f)$. La somme est ici égale à g et on obtient donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(f) = \alpha_n(g) \ \text{ et } \ \beta_n(f) = \beta_n(g)$$

b) Les fonctions $h \mapsto \alpha_n(h)$ et $h \mapsto \beta_n(h)$ étant linéaires, on a ici pour tout entier naturel n, $\alpha_n(g - f) = \beta_n(g - f) = 0$ et, avec le résultat admis $g - f = \tilde{0}$.

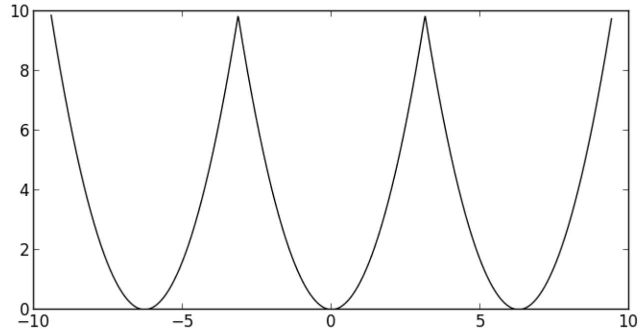
10) Si f est paire, la fonction $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est impaire et sa fonction est donc d'intégrale nulle sur un intervalle centré sur 0 (ce que l'on voit par le changement de variable affine $t = -x$). En particulier,

$$\forall n,\ \beta_n(f) = 0$$

On a aussi que la fonction $x \mapsto f(x)\cos(nx)$ est paire et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx$$

11) Le graphe de la fonction f est le suivant.



La fonction f étant paire, les coeffcients $\beta_n(f)$ sont tous nuls. De plus

$$\alpha_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx)\, dx$$

Une double intégration par parties donne, pour $n \neq 0$,

$$\int_0^\pi x^2 \cos(nx)\, dx = -\frac{2}{n} \int_0^\pi x \sin(nx)\, dx = -\frac{2}{n} \left(\left[-\frac{x \cos(nx)}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(nx)\, dx \right)$$

et ainsi

$$\forall n \neq 0,\ \alpha_n(f) = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

On a aussi

$$\alpha_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2\, dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

Comme les séries numériques $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n(f)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \beta_n(f)$ convergent absolument, on peut utiliser ce qui précède et conclure

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

la série étant normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

12) Pour $x = 0$, on obtient $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$. Pour $x = \pi$, on obtient $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On découpe la somme en isolant les termes d'indice pair et ceux d'indice impair (c'est licite car la série est absolument convergente) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

13) La fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est continue sur $]0, 1]$. En 0, la fonction est équivalente à $\frac{x}{x} = 1$ et est donc prolongeable par continuité. Notre fonction est donc intégrable sur $[0, 1]$ (ce n'est même pas une intégrale généralisée).

En utilisant la formule donnée :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}$$

On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}\, dx$$

Utilisons le théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue. Pour cela on pose pour tout entier n non nul, $g_n \ : \ x \mapsto (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}$

- La série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} g_n$ converge simplement sur $]0, 1[$ vers $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$.
- Pour tout entier naturel n non nul, g_n est continue.
- La fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est continue sur $]0, 1[$.
- Pour tout entier naturel n, la fonction g_n est intégrable sur $]0, 1[$ et un calcul direct donne $\displaystyle\int_0^1 |g_n(x)|\, dx = \frac{1}{n^2}$. Cela montre que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \int_0^1 |g_n|$ converge.

L'interversion est licite et donne

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

14) Dans l'exemple de la question 12, on a obtenu une série normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Cependant la somme f n'est pas dérivable. En effet, f est dérivable à droite et gauche en π avec des nombres dérivés 2π (à gauche) et -2π (à droite).

Supposons que les séries numériques $\sum\limits_{n \geqslant 0} n a_n$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} n b_n$ sont des séries absolument convergentes. Montrons qu'alors en posant pour tout entier naturel n, $u_n : x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On utilise pour cela le théorème de caractère $\mathscr{C}^1$ des sommes de séries fonctions.

- $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et $u_n'(x) = -n a_n \sin(nx) + n b_n \cos(nx)$.
- La série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- On vérifie aisément que $\|u_n'\|_\infty \leqslant |n a_n| + |n b_n|$. On en déduit par comparaison pour les séries à termes positifs que la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 0} ||u_n'||_\infty$ converge.
  Cela montre que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n'$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique donc et indique non seulement que la somme est de classe $\mathscr{C}^1$ mais que sa dérivée est la somme de la série dérivée.

15) On a vu en question 1 que : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n} = \frac{3\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}$.

On est dans le cadre de la condition précédente avec $a_n = 0$ et $b_n = 1/3^n$. On en déduit (en dérivant) que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n} = \frac{3}{2} \frac{5\cos(x) - 3}{(5 - 3\cos(x))^2}$$

Problème II

Partie I - Préliminaire

1) Soient $A, b \in \mathsf{Vect}(M_1, \dots, M_r)$. Il existe alors des complexes $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r$ tels que $A = \sum_{k=1}^{r} a_k M_k$ et $B = \sum_{k=1}^{r} b_k M_k$.

$$AB = \sum_{(p,q)\in[\![1,r]\!]^2} a_p b_q M_p M_q = \sum_{(p,q)\in[\![1,r]\!]^2} a_p b_q M_q M_p = BA$$

2) L'application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même qui à toute matrice M associe $Q^{-1}MQ$ est un automorphisme d'algèbre (de réciproque $A \mapsto QAQ^{-1}$), donc est injectif et par conséquent transforme toute famille libre en une famille libre, et toute paire de matrices qui commutent en une paire de matrices qui commutent.

Partie II - Cotrigonalisation

3) a) M_1 a au moins une valeur propre car χ_{M_1} est scindé sur $\mathbb{C}$ et de degré $n \geqslant 1$, donc a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

b) Soit $X \in E_{\lambda_1}(M_1)$. Alors, comme $M_1M_2 = M_2M_1$,

$$M_1(M_2X) = M_2(M_1X) = M_2(\lambda_1 X) = \lambda_1 M_2 X$$

donc $M_2X \in E_{\lambda_1}(M_1)$.

c) Soit u_2 l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M_2 et soit $\breve{u}_2$ l'endomorphisme de $E_{\lambda_1}(M_1)$ induit par u_2. Cet endomorphisme admet au moins une valeur propre λ_2 car χ_{u_2} est scindé sur $\mathbb{C}$ et de degré $\dim(E_{\lambda_1}(M_1)) \geqslant 1$ donc a au moins une racine.

Soit X un vecteur propre (donc non nul) de $\breve{u}_2$ associé à λ_2. Alors $M_2X = \breve{u}_2(X) = \lambda_2 X$ et, comme $X \in E_{\lambda_1}(M_1)$, on a aussi $M_1X = \lambda_1 X$.

d) Complétons la famille (X), qui est libre car $X \neq 0_{\mathbb{C}^n}$, en une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{C}^n$. Soit $P = Mat_{can}(\mathscr{B}')$ la matrice de passage de la base canonique *can* de $\mathbb{C}^n$ à la base $\mathscr{B}'$. Alors P est inversible et $P^{-1}M_1P = Mat_{\mathscr{B}'}(u_1)$ et $P^{-1}M_2P = Mat_{\mathscr{B}'}(u_2)$ (où u_1 est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M_1).

Comme $u_1(X) = \lambda_1 X$ et $u_2(X) = \lambda_2 X$, les premières colonnes de $Mat_{\mathscr{B}'}(u_1)$ et $Mat_{\mathscr{B}'}(u_2)$ sont respectivement $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Enfin $Mat_{\mathscr{B}'}(u_1)$ et $Mat_{\mathscr{B}'}(u_2)$ commutent d'après la question 2), et un calcul par blocs élémentaire montre alors que $A_1A_2 = A_2A_1$.

4) Notons, pour tout naturel n non nul, $\mathcal{P}_n$ l'assertion "pour toutes matrices permutables (c'est-à-dire qui commutent) $M_1, M_2 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe Q inversible telle que ...".

L'assertion $\mathcal{P}_1$ est triviale (il suffit de prendre $Q = I_1$ car toute matrice scalaire est triangulaire supérieure).

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$, telle que $\mathcal{P}_{n-1}$. Soient M_1, M_2 des matrices permutables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $A_1, A_2 \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ comme dans la question précédente.

Comme on a supposé que $\mathcal{P}_{n-1}$ et comme A_1 et A_2 commutent, il existe une matrice $R \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$ telle que $T_1 = R^{-1}A_1R$ et $T_2 = R^{-1}A_2R$ soient triangulaires supérieures.

Posant $Q = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{array}\right) P$ on a $Q^{-1}M_1Q = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & T_1 \\ 0 & \end{array}\right)$ qui est triangulaire supérieure, et il en va de même pour $Q^{-1}M_2Q$.

Partie III - Cas $n = 2$

5) Il suffit de prendre $M_1 = I_2$ et $M_2 \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \setminus (\mathbb{C}I_2) \neq \emptyset$.

6) a) Le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ constitué des matrices triangulaires supérieures est de dimension 3 car la famille de matrices élémentaires (E_{11}, E_{12}, E_{22}) en est une base.

b) Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne commutent pas.

c) Soient $M_1, M_2, M_3 \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ deux à deux permutables. D'après le résultat admis en fin de partie I, il existe une matrice $Q \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que les matrices $T_1 = Q^{-1}M_1Q$, etc... soient triangulaires supérieures. De plus, ces trois matrices commutent deux à deux par la question 2.
Si (M_1, M_2, M_3) était libre, alors (T_1, T_2, T_3) le serait également par la question 2). Ainsi (T_1, T_2, T_3), étant de cardinal 3, formerait une base du sous-espace des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. On en déduirait que ce sous-espace serait une sous-algèbre commutative de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ (car les combinaisons linéaires de (T_1, T_2, T_3) commutent deux à deux par la question 1).
Or ceci est faux d'après la question précédente.
Donc M_1, M_2, M_3 est liée. Ainsi (puisque toute sur-famille d'une famille liée est liée) le théorème A est vrai pour $n = 2$.

Partie IV - Cas général

7) a) Les matrices $N_1, \dots, N_r$ commutent deux à deux (cf question 3d). On peut extraire de la famille $(N_1, \dots, N_r)$ une sous-famille libre de cardinal k, formée de matrices de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ deux à deux permutables. Par hypothèse de récurrence, on a donc $k \leqslant \alpha_{n-1}$.

b) Par hypothèse, toutes les matrices N_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ sont combinaisons linéaires de $(N_1, \dots, N_k)$ d'où l'existence des coefficients $n_{i,j}$.

c) W est stable par combinaison linéaire et contient chacune des matrices $A_1, \dots, A_r$ donc contient les matrices $B_{k+1}, \dots, B_r$
Pour tout $i \in [\![k+1, r]\!]$,

$$B_i = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_i - \sum_{j=1}^k n_{ij}\alpha_j & L_i - \sum_{j=1}^k n_{ij}L_j \\ \hline 0 & \\ \vdots & N_i - \sum_{j=1}^k n_{ij}N_j \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_i - \sum_{j=1}^k n_{ij}\alpha_j & L_i - \sum_{j=1}^k n_{ij}L_j \\ \hline 0 & \\ \vdots & O \\ 0 & \end{array}\right)$$

est bien de la forme $\begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix}$.
Soient $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_r$ des complexes tels que $\sum_{i=k+1}^r \lambda_i X_i = 0$.
Alors $\sum_{i=k+1}^r \lambda_i B_i = 0$.
Donc

$$\sum_{i=k+1}^{r} \lambda_i A_i - \sum_{j=1}^{k} (\sum_{i=k+1}^{r} \lambda_i n_{ij}) A_i = 0.$$

Or, d'après la question 2), $(A_1, \dots, A_r)$ est libre, donc on a en particulier $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_r = 0$.

Donc les X_i $(k+1 \leqslant i \leqslant r)$ sont linéairement indépendants.

8) On raisonne comme dans la question 7) précédente, mais en écrivant les matrices A_i sous la forme

$$A_i = \left(\begin{array}{ccc|c} & T_i & & C_i \\ \hline 0 & \dots & 0 & \beta_i \end{array}\right)$$

9) Soient $i \in [\![k+1, r]\!]$ et $j \in [\![k'+1, r]\!]$. Les éléments de W sont deux à deux permutables comme combinaisons linéaires de $(A_1, \dots, A_r)$, cf question 1). Ainsi $B_iC_j = C_jB_i$.

On a donc $\begin{pmatrix} 0 & X_iY_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.X_i + Y_j.0 = 0$.

Donc $X_iY_j = 0$.

10) a) $\mathrm{rg}(T) = r - k$ car les lignes de T sont indépendantes. Pour tout $j \in [\![k'+1, r]\!]$,

$TY_j = \begin{pmatrix} X_{k+1}Y_j \\ \vdots \\ X_rY_j \end{pmatrix} = 0.$

b) Le noyau de la matrice T contient donc $r - k'$ vecteurs indépendants, donc est de dimension supérieure ou égale à $r - k'$.

En utilisant le théorème du rang, on en déduit que

$$n = rg(T) + \dim(\ker T) \geqslant r - k + r - k' = 2r - k - k' > 2\alpha_n - 2\alpha_{n-1} + 2$$

car $r > \alpha_n$, $k \leqslant \alpha_{n-1}$ et $k' \leqslant \alpha_{n-1}$.

c) Si n est pair, posant $p = \frac{n}{2}$, on a $\alpha_n = \lfloor \frac{4p^2}{4} \rfloor + 1 = p^2 + 1 = \frac{n^2}{4} + 1$. Si n est impair, posant $p = \frac{n-1}{2}$ (de sorte que $n = 2p+1$), on a : $\alpha_n = \lfloor \frac{4p^2+4p+1}{4} \rfloor + 1 = p^2 + p + 1 = p(p+1) + 1 = \frac{n-1}{2}\frac{n+1}{2} + 1 = \frac{n^2-1}{4} + 1$.

Donc,

-si n est pair (et donc $n-1$ est impair)

$$2\alpha_n - 2\alpha_{n-1} = \frac{n^2 - [(n-1)^2 - 1]}{2} + 2 - 2 = n$$

-si n est impair (et donc $n-1$ est pair)

$$2\alpha_n - 2\alpha_{n-1} = \frac{n^2 - 1 - (n-1)^2}{2} + 2 - 2 = n$$

Dans tous les cas, l'inégalité $n > 2\alpha_n - 2\alpha_{n-1}$ est fausse.

11) Donc l'hypothèse l'indépendance des M_i est contradictoire. Ainsi le théorème A est vrai au rang n (s'il est vrai au rang $n-1$). Etant vrai au rang 2, on en déduit par récurrence qu'il est vrai à tout rang rang supérieur ou égal à 2.

Il est également vrai au rang 1 car $\alpha_1 = 1$ et $\dim(\mathscr{M}_1(\mathbb{C})) = 1$ donc toute famille d'au moins $\alpha_1 + 1 = 2$ matrices de $\mathscr{M}_1(\mathbb{C})$ est liée.

Ce résultat est un théorème de Issai Schur (1875 - 1941) démontré en 1905. La preuve élémentaire ci-dessus est due à Maryam Mirzakhani (1977 - 2017) qui est, à ce jour, la seule femme à avoir reçu la médaille Fields.