Calculatrices interdites. Les deux problèmes sont indépendants.

Problème I

Dans ce qui suit, on appelle « série trigonométrique » une série de fonctions du type $\sum_{n\geqslant 0}(x \mapsto a_n \cos(nx)+b_n \sin(nx))$ que l'on notera abusivement $\sum_{n\geqslant 0}(a_n \cos(nx)+b_n \sin(nx))$ où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels.

On notera $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in C_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on notera

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx \quad \text{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\, dx$$

Partie I : Exemples

1) Démontrer que la série trigonométrique $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx)+\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
   Soit x un réel. Pour tout entier $p \geqslant 2$, déterminer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n$ puis en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx)+\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$.
   (il n'est pas utile de réduire au même dénominateur mais on donnera un résultat sans nombre imaginaire).
2) Écrire la fonction $\varphi : x \mapsto \exp(\cos(x))\cos(\sin(x))$ comme la somme d'une série trigonométrique.
   On pourra écrire la fonction $x \mapsto \exp(e^{ix})$ comme somme d'une série de fonctions.
3) Donner un exemple de suite (a_n) de limite nulle telle que la série trigonométrique $\sum_{n\geqslant 0} a_n \cos(nx)$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.
4) On admet que la série trigonométrique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

Partie II : Propriétés

Une condition suffisante

5) Démontrer que si les séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum_{n\geqslant 0} a_n \cos(nx)+b_n \sin(nx)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

6) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques.
   Démontrer que le maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto |a\cos(x)+b\sin(x)|$ est $\sqrt{a^2+b^2}$.

7) Démontrer que si la série trigonométrique $\sum_{n\geqslant 0} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors les séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ sont absolument convergentes.

Autres propriétés

8) On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum_{n\geqslant 0} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$.

a) Justifier que $f\in C_{2\pi}$.

b) Calculer $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\,dx$ pour $n\neq 0$ et donner la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\,dx$ pour k et n entiers.

On admet dans la suite que pour $k,n\in\mathbb{N}$ avec $k\neq n$, $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\,dx=0$.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\alpha_n(f)=a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0.

On admettra, pour la suite du problème, que pour tout entier naturel n non nul $\beta_n(f)=b_n$ et $\beta_0(f)=0$ (la démonstration n'est pas demandée).

9) Soit $f\in C_{2\pi}$. Pour tout réel x et tout entier naturel n, on pose

$$u_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha_0(f)}{2} & \text{si } n=0\\[2ex] \alpha_n(f)\cos(nx)+\beta_n(f)\sin(nx) & \text{sinon.}\end{cases}$$

On suppose ici que la série trigonométrique $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée g :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\frac{\alpha_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha_k(f)\cos(kx)+\beta_k(f)\sin(kx))$$

a) Quelles relations a-t-on dans ce cas entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?

On admet que la fonction nulle est la seule fonction $h\in C_{2\pi}$ vérifiant que pour tout entier naturel n, $\alpha_n(h)=\beta_n(h)=0$.

b) Démontrer que $g=f$

En résumé, si $f\in C_{2\pi}$ et que la série trigonométrique $\sum_{n\geqslant 1}\alpha_n(f)\cos(nx)+\beta_n(f)\sin(nx)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ alors pour tout réel x, on a

$$f(x)=\frac{\alpha_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n(f)\cos(nx)+\beta_n(f)\sin(nx))$$

10) Si $f\in C_{2\pi}$ est une fonction paire, que valent les réels $\beta_n(f)$? Exprimer, sans démonstration, $\alpha_n(f)$ en fonction de l'intégrale $\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$.

11) Exemple : Soit $f\in C_{2\pi}$ définie ainsi : pour tout $x\in[-\pi,\pi]$, $f(x)=x^2$ et f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Construire la courbe de cette fonction f sur l'intervalle $[-3\pi,3\pi]$ puis déterminer, pour tout entier naturel, les coefficients $\alpha_n(f)$ et $\beta_n(f)$.
Donner une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.

12) En déduire les sommes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Déduire alors la valeur de : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

On admet que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$.

13) Justifier que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$ puis démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx = \frac{\pi^2}{12}$.

14) La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$?
Proposer une condition suffisante sur les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} na_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} nb_n$ pour que la somme de la série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ soit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

15) Déterminer la somme de la série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{3^n} \cos(nx)$.

Problème II

Dans tout ce devoir, n désigne un entier naturel non nul. On pose alors $\alpha_n = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 1$.
Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème A : *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M_1, \ldots, M_r$ une famille de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que*

— *Les matrices commutent deux à deux : $\forall (i,j) \in [\![1, r]\!]^2, M_iM_j = M_jM_i$.*

— *$r > \alpha_n$*

Alors la famille est liée.

Partie I - Préliminaire

Soit $M_1, \ldots, M_r$ une famille de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent deux à deux.

1) Montrer que si A et B sont deux matrices appartenant à $\mathsf{Vect}(M_1, \ldots, M_r)$ alors A et B commutent.

2) Soit Q une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $(M_1, \ldots, M_r)$ est une famille libre et on pose pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $A_i = Q^{-1}M_iQ$.
Montrer que la famille $(A_1, \ldots, A_r)$ est libre et que pour tout $(i,j) \in [\![1, r]\!]^2$, $A_iA_j = A_jA_i$.

Partie II - Cotrigonalisation

Soit M_1 et M_2 deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M_1M_2 = M_2M_1$.

3) a) Justifier que M_1 a au moins une valeur propre notée λ_1.

b) Montrer que l'espace propre $E_{\lambda_1}(M_1) = \ker(M_1 - \lambda_1 I_n)$ est stable par M_2, c'est-à-dire que pour tout $X \in E_\lambda(M_1), M_2X \in E_{\lambda_1}(M_1)$.

c) En déduire qu'il existe un vecteur colonne X non nul qui soit un vecteur propre de M_1 et de M_2.
On pourra considérer l'endomorphisme induit par $X \mapsto M_2X$ sur $E_{\lambda_1}(M_1)$.

d) Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}M_1P = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right) \text{ et } P^{-1}M_2P = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_2 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_2 \\ 0 & \end{array}\right)$$

où $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ et que A_1 et A_2 commutent.

4) En utilisant une récurrence sur n, montrer qu'il existe une matrice inversible Q telle que $Q^{-1}M_1Q$ et $Q^{-1}M_2Q$ sont triangulaires supérieures.

On admet dans la suite du devoir que le résultat ci-dessous se généralise à une famille de r matrices commutant deux à deux.

Partie III - Cas $n = 2$

Dans cette partie, on se place dans le cas où $n = 2$. On a alors $\alpha_2 = 2$.

5) Exhiber deux matrices M_1 et M_2 de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telles que (M_1, M_2) soit libre et que $M_1M_2 = M_2M_1$.

6) a) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ constitué des matrices triangulaires supérieures.

b) Exhiber deux matrices triangulaires supérieuress de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ qui ne commutent pas.

c) En déduire que le théorème A est vrai pour $n = 2$. On pourra utiliser le résultat admis dans la partie II

Partie IV - Cas général

On démontre le théorème A par récurrence. Soit n un entier au moins égal à 3. On suppose que le théorème A est vrai au rang $n-1$. On considère alors une famille $M_1, \ldots, M_r$ de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ linéairement indépendantes qui commutent deux à deux où $r > \alpha_n$ (on raisonne par l'absurde). En utilisant le résultat prouvé à la partie II, on sait qu'il existe une matrice inversible Q telle que pour tout i compris entre 1 et r, $A_i = Q^{-1}M_iQ$ est triangulaire supérieure. On notera de plus W l'espace vectoriel engendré par les matrices $A_1, \ldots, A_r$.

7) On pose pour tout $i \in [\![1, r]\!]$,

$$A_i = \left(\begin{array}{c|c} a_i & L_i \\ \hline 0 & \\ \vdots & N_i \\ 0 & \end{array}\right).$$

On notera $k = \mathrm{rg}(N_1, \ldots, N_r)$.

a) Justifier que $k \leqslant \alpha_{n-1}$.

Quitte à permuter les matrices, on peut supposer que $\mathsf{Vect}(N_1, \ldots, N_r) = \mathsf{Vect}(N_1, \ldots, N_k)$.

b) Montrer que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, il existe des complexes $n_{i,1}, \ldots, n_{i,k}$ tels que

$$N_i = \sum_{j=1}^{k} n_{i,j} N_j.$$

c) On pose alors pour $i \in [\![k+1, r]\!]$, $B_i = A_i - \sum_{j=1}^{k} n_{i,j} A_j$. Justifier que les matrices B_i appartiennent à W et qu'il existe des vecteurs lignes $X_i \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ linéairement indépendants tels que

$$\forall i \in [\![k+1, r]\!], B_i = \left(\begin{array}{c} X_i \\ \hline 0_{n-1,n} \end{array}\right).$$

où, si p, q sont deux entiers naturels non nuls, $0_{p,q}$ désigne la matrice nulle de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$.

8) Justifier qu'il existe aussi un entier $k' \leqslant \alpha_{n-1}$ et des vecteurs colonnes $Y_j \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ pour $j \in [\![k'+1, r]\!]$ linéairement indépendants tels que les matrices $C_j = \left(\begin{array}{c|c} 0_{n,n-1} & Y_j \end{array}\right)$ appartiennent à W.

9) Montrer que pour $i \in [\![k+1, r]\!]$ et $j \in [\![k'+1, r]\!]$, $X_iY_j = 0$. On pourra utiliser la question 1.

10) On considère alors

$$T = \begin{pmatrix} X_{k+1} \\ X_{k+2} \\ \vdots \\ X_r \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{C})$$

où $p = r - k$.

a) Justifier que $\mathrm{rg}(T) \geqslant r - k$. Montrer que pour tout $j \in [\![k'+1, r]\!]$, $TY_j = 0$.

b) En utilisant le théorème du rang, en déduire que

$$n \geqslant 2r - k - k' > 2\alpha_n - 2\alpha_{n-1}.$$

c) Montrer que cette inégalité est fausse. On pourra séparer les cas n pair et n impair.

11) Conclure.