

Partie I : Matrices compagnons

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans \mathbf{K} . On définit la matrice compagnon de P par

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$$

Notons que pour $n = 1$ et $P = X + a_0$ on a donc $C(P) = (a_0) \in \mathcal{M}_1(\mathbf{K})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de $C(P)$ pour $P = X^3 + X^2 - X - 1$.
2. Montrer que $\chi_{C(P)} = P$. On pourra procéder par récurrence.

Partie II : Théorème de Cayley-Hamilton

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On veut montrer que $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. On fixe un élément x de E non nul.

On note p le plus petit entier p tel que la famille $(x = u^0(x), u(x), \dots, u^p(x))$ soit liée.

- (a) Justifier que $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre. On complète cette famille en une base \mathcal{B} de E .
- (b) Montrer qu'il existe $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbf{K}^p$ tels que

$$u^p(x) + a_{p-1}u^{p-1}(x) + \dots + a_1u(x) + a_0x = 0$$

On note $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_1X + a_0$.

- (c) Justifier que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ peut s'écrire sous la forme $\left(\begin{array}{c|c} C(P) & * \\ \hline 0 & M \end{array} \right)$.

- (d) Calculer $P(u)(x)$.
- (e) Exprimer χ_u en fonction de χ_M .
- (f) Prouver que $\chi_u(u)(x) = 0_E$.

2. Conclure.