Le but de l'algorithme augmenté est de calculer en même temps le PGCD de deux éléments ainsi que les coefficients de Bézout. On peut l'utiliser dans $\mathbf{Z}$ ou dans $\mathbf{K}[X]$.

Rappelons pour commencer le principe (en l'écrivant dans l'anneau $\mathbf{Z}$) : On considère deux éléments a et b non nuls de $\mathbf{Z}$. On veut calculer le PGCD $d = a \wedge b$, ainsi que des coefficients de Bézout, c'est-à-dire deux entiers u et v teks que

$$au + bv = d$$

Le principe de l'algorithme est de construire trois suites (u_n), (v_n) et (r_n) d'éléments de $\mathbf{Z}$ telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}, au_n + bv_n = r_n$$

On notera $X_n = (u_n \quad v_n \quad r_n)$.

Après plusieurs itérations, on trouvera un entier p tel que $r_p = d$ et alors u_p et v_p seront les coefficients de Bézout cherchés.

On initialise en posant $u_0 = 1, v_0 = 0$ puis $u_1 = 0, v_1 = 1$. Pour assurer la relation ci-dessus, on prend donc $r_0 = a$ et $r_1 = b$.

Ensuite, tant que $r_n \neq 0$, on réalise la division euclidienne de r_{n-1} par r_n ; on note q_n le quotient et r_{n+1} le reste :

$$r_{n-1} = q_n r_n + r_{n+1}$$

On pose alors

$$X_{n+1} = X_{n-1} - q_n X_n$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} = u_{n-1} - q_n u_n \text{ et } v_{n+1} = v_{n-1} - q_n v_n$$

On a bien aussi $r_{n+1} = r_{n-1} - q_n r_n$.

Par exemple pour $a = 32$ et $b = 23$ on a :

	u_n	v_n	r_n	q_n		
X_0	1	0	32			
X_1	0	1	23	1	$(32 = 1 \times 23 + 9)$	
X_2	1	-1	9	2	$(23 = 2 \times 9 + 5)$	$X_2 = X_0 - X_1$
X_3	-2	3	5	1	$(9 = 1 \times 5 + 4)$	$X_3 = X_1 - 2X_2$
X_4	3	-4	4	1	$(5 = 1 \times 4 + 1)$	$X_4 = X_2 - X_3$
X_5	-5	7	$\boxed{1}$	4	$(4 = 4 \times 1 + 0)$	$X_5 = X_3 - X_4$
X_6	23	32	0			$X_6 = X_4 - 4X_5$

Comme dans l'algorithme d'Euclide standard, on s'arrête au premier reste non nul.

Traitons maintenant un exemple dans $\mathbf{K}[X]$.

Calculons de PGCD de $P = X^5 + X^4 + 2X^3 + X^2 + X + 2$ et $Q = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4$ ainsi que les coefficients de Bézout.

On pose donc $U_0 = 1, V_0 = 0\,;\, U_1 = 0, V_1 = 1$ de sorte que $R_0 = P$ et $R_1 = Q$.

— On effectue la division euclidienne de R_0 par R_1 :

$$X^5 + X^4 + 2X^3 + X^2 + X + 2 = (X-1) \times (X^4 + 2X^3 + X^2 - 4) + 3X^3 + 2X^2 + 5X^2 - 2$$

On pose donc $R_2 = 3X^3 + 2X^2 + 5X^2 - 2$. On peut alors calculer U_2 et V_2 par les formules

$$U_2 = U_0 - (X-1)U_1 = 1$$

et

$$V_2 = V_0 - (X-1)V_1 = -(X-1)$$

.

— On effectue la division euclidienne de R_1 par R_2 :

$$X^4 + 2X^3 + X^2 - 4 = \frac{1}{9}(3X+4) \times (3X^3 + 2X^2 + 5X^2 - 2) - \frac{14}{9}(X^2 + X + 2)$$

On pose donc $R_3 = -\frac{14}{9}(X^2 + X + 2)$. On peut alors calculer U_3 et V_3 par les formules

$$U_3 = U_1 - \frac{1}{9}(3X+4)U_2 = -\frac{1}{9}(3X+4)$$

et

$$V_3 = V_1 - \frac{1}{9}(3X+4)V_2 = 1 + \frac{1}{9}(3X+4)(X-1) = \frac{1}{9}(3X^2 + X + 5)$$

. Pour éviter d'avoir une fraction dans le reste R_3, on peut tout multiplier par $-\frac{9}{14}$ pour obtenir

$$R_3 = X^2 + X + 2 \;\;;\;\; U_3 = \frac{1}{14}(3X+4) \;\;;\;\; V_3 = -\frac{1}{14}(3X^2 + X + 5)$$

— On effectue la division euclidienne de R_2 par R_3 :

$$3X^3 + 2X^2 + 5X^2 - 2 = (3X-1) \times (X^2 + X + 2) + 0$$

On vient de trouver un reste nul.

On remonte donc au dernier reste non nul.

Le PGCD est le dernier reste non nul normalisé. Ici, $P \wedge Q = X^2 + X + 2$.

De plus,

$$X^2 + X + 2 = -\frac{1}{14}(3X^2 + X + 5)Q + \frac{1}{14}(3X+4)P.$$