1. Pour $n \geqslant 1$, on pose u_n définie sur $\mathbf{R}_+$ par $u_n : x \mapsto nxe^{-nx}$.
   Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}_+$ et que sa somme est continue sur $]0, +\infty[$.

Corrigé

Si $x = 0$, $u_n(x) = 0$ et la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n(0)$ converge ; si $x > 0$, $n^3 xe^{-nx} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées et donc $u_n(x) = o(\frac{1}{n^2})$. Or la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est absolument convergente donc la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.
Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$, pour tout $x \in [a, b]$,

$$|u_n(x)| \leqslant nbe^{-na}$$

Donc $||u_n||_{\infty,[a,b]} \leqslant nbe^{-na}$. Or $a > 0$ donc, en procédant comme ci-dessus, $\sum\limits_{n \geqslant 1} ||u_n||_{\infty,[a,b]}$ converge. On en déduit que la série de fonction converge normalement donc uniformément sur $[a, b]$. De plus, pour tout entier $n \geqslant 1$, u_n est continue sur $[a, b]$ donc $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ est continue sur $[a, b]$. Cela étant vrai, pour tout segment $[a, b]$ de $]0, +\infty[$, S est continue sur $]0, +\infty[$.

2. On considère pour $n \geqslant 1$ et $\alpha \in \mathbf{R}$, la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f_n : x \mapsto x(1 + n^\alpha e^{-nx})$.
   (a) Déterminer (soigneusement) la limite simple de (f_n).

Corrigé

Si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$ et donc $(f_n(0)) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Si $x > 0$, $n^\alpha e^{-nx} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées et donc $(f_n(x)) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x$. Finalement $(f_n) \xrightarrow{CS} f$ où $f : x \mapsto x$.

   (b) Pour quelles valeurs de α la convergence est uniforme sur $\mathbf{R}_+$?

Corrigé

Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$ et tout $n \geqslant 1$, on pose $h_n = f_n - f : x \mapsto xn^\alpha e^{-nx}$.
Elle est dérivable et, pour $x \in \mathbf{R}_+$, $h'_n(x) = n^\alpha(1 - nx)e^{-nx}$. On en déduit que

$$||h_n||_\infty = \left| h_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{n^\alpha}{n} e^{-1} = \frac{1}{e} n^{\alpha - 1}.$$

De ce fait la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction $x \mapsto x$ si et seulement si $\alpha < 1$.