1. Soit $A \in \mathscr{M}_(\mathbf{K})$ telle que $\chi_A = X^2(X-1)(X+1)^2$.

Corrigé

a) La matrice A est diagonalisable	☐ Vrai	☑ Pas sur
b) On a $\mu_A = X(X-1)(X+1)$	☐ Vrai	☑ Pas sur
c) On suppose A diagonalisable		
Le polynôme minimal est	☑ $X(X-1)(X+1)$	☐ χ_A

2.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer χ_A

Corrigé

On trouve $\chi_A = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 = (X-1)^3$

   (b) Déterminer μ_A. On justifiera les calculs

Corrigé

Comme $\chi_A = (X-1)^3$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton et le fait que 1 étant une valeur propre de A, $\mu_A(1) = 0$ on sait que μ_A peut être égal à $(X-1), (X-1)^2$ ou $(X-1)^3$. Calculons $A - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -15 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -10 & 2 \end{pmatrix}$.

On vérifie que $(A-I_3)^2 = 0$ et donc $\boxed{\mu_A = (X-1)^2}$.

(c) Soit $k \in \mathbf{N}$. Déterminer A^k en fonction de I_3, A, A^2 et A^3.

Corrigé

Posons $N = A - I_3$ qui est nilpotente vérifiant $N^2 = 0$. On a alors $A = I_3 + N$ avec $I_3 N = N I_3$. Donc pour tout entier k,

$$A^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} N^i I_3^k = \sum_{i=0}^{1} \binom{k}{i} N^i \text{ car } N^2 = 0$$

Cela donne

$$A^k = I_3 + kN = I_3 + k(A - I_3) = \boxed{(1-k)I_3 + kA}$$

Corrigé

On peut aussi utiliser la formule de Taylor en 1. Pour tout polynôme P de degré d supérieur ou égal à 2 :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{d} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = P(1) + P'(1)(X-1) + (X-1)^2 \times Q$$

On en déduit que le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est le polynôme de degré au plus 1 : $R(X) = P(1) + P'(1)(X-1)$. En particulier,

$$P(A) = P(1)I_3 + P'(1)(A - I_3) + 0_3$$

En utilisant cette formule pour $P = X^k$, on obtient :

$$A^k = I_3 + k(A - I_3) = \boxed{kA + (1-k)I_3}$$