Exercice I

1) On part avec le développement limité usuel :

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{p-1} a_k x^k + o_{x\to 0}(x^{p-1})$$

avec pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{k!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-(k-1)\right) \\ &= \frac{1}{k!}\frac{1.(-1)(-3)\dots\big(-(2k-3)\big)}{2^k} \\ &= (-1)^{k-1}\frac{1}{k!}\frac{(2k)!}{2.4.6\dots(2k-2)(2k-1)(2k)2^k} \\ &= (-1)^{k-1}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k-1)} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k}(2k-1)}\binom{2k}{k} \end{aligned}$$

2) On rapppelle que : $o_{x\to 0}(x^{p-1}) = \varepsilon(x)\ x^{p-1}$ avec ε de limite nulle en 0

• En élevant au carré on a : $1 + x = P_p^2(x) + 2P_p(x)\varepsilon(x)\ x^{p-1} + \varepsilon(x)^2\ x^{2p-2}$

Comme $P_p(x) \longrightarrow P_p(0) \in \mathbb{R}$ quand x tend vers 0, $\lim\limits_{x\to 0}\ 2P_p(x)\varepsilon(x) = 0$,

ainsi $2P_p(x)\varepsilon(x)\ x^{p-1} = o_{x\to 0}(x^{p-1})$.

De même, $\varepsilon(x)^2\ x^{2p-2} = o_{x\to 0}(x^{p-1})$ car $\lim\limits_{x\to 0}\ x^{p-1}\varepsilon(x)^2 = 0$

Finalement : $\boxed{1 + x - P_p(x)^2 = o_{x\to 0}(x^{p-1})}$.

• On remarque que $Q = 1 + X - P_p^2$ est un polynôme comme différence de polynômes. Notant $Q = \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k X^k$ (somme à support fini), on a $Q(x) = \sum_{k=0}^{p-1} q_k x^k + o_{x\to 0}(x^{p-1})$. Par unicité du développement limité d'ordre $p-1$ de $Q(x)$ quand $x \to 0$, on en déduit que $q_0 = q_1 = \ldots = q_{p-1} = 0$. Ainsi Q est divisible par X^p.

3) Comme $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)} \neq f^{p-1}$, on en déduit que X^p annule f mais X^{p-1} ne l'annule pas.

Donc le polynôme minimal Π_f divise X^p mais ne divise pas X^{p-1}. Comme Π_f est unitaire et que les seuls diviseurs unitaires de X^p sont les X^k avec $k \leqslant p$, on en déduit que $\Pi_f = X^p$.

4) On a $g^2 = (P_p^2)(f) = (1 + X - (1 + X - P_p^2))(f) = id_E + f - (1 + X - P_p^2)(f)$.

Or $1 + X - P_p^2$ est multiple du polynôme minimal X^p de f, donc il annule f.

Ainsi $g^2 = id_E + f$.

5) $A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 8 \\ -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Par ce qui précéde, on a $B^2 = I_3 + A$ en posant

$$B = P_3(A) = I_3 + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2!}\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})A^2 = I_3 + \frac{1}{2}A - \frac{1}{8}A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -\frac{5}{4} & \frac{13}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{8} & \frac{7}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

6) • Comme f^{p-1} n'est pas l'endomorphisme nul, il existe $x_0 \in \mathcal{E}$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$.

• Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}$ des réels tels que

$$0_E = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \ldots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0) \quad (*)$$

Appliquant f^{p-1} aux deux membres de cette relation, et remarquant que pour $q \geqslant p$ on a $f^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$ car X^q est multiple du polynôme minimal (annulateur suffit) X^p de f, on en déduit

$$\lambda_0 f^{p-1}(x_0) = 0_E$$

et comme $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$, on en déduit que $\lambda_0 = 0_{\mathbb{R}}$.

Appliquant maintenant f^{p-2} aux deux membres de $(*)$, on a

$$\lambda_0 f^{p-2}(x_0) + \lambda_1 f^{p-1}(x_0) = 0_E$$

et comme λ_0 est nul, on en déduit que λ_1 l'est aussi.

Par récurrence **forte**, on montre que tous les λ_k sont nuls : pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, supposant que $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{k-1} = 0$ et appliquant f^{p-1-k} aux deux membres de $(*)$, on en déduit que $\lambda_k = 0$.

$\boxed{\text{La famille } (x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)) \text{ est donc libre}}$.

Comme une famille libre de E comporte au plus $dim(E) = n$ termes, on en déduit que $p \leqslant n$. Donc X^n est multiple de X^p, polynôme minimal (annulateur suffit) de f et par conséquent annule f. (remarque : l'inégalité $p \leqslant n$ est aussi une conséquence du théorème de Cayley-Hamilton qui entraîne que le degré de Π_f est inférieur ou égal à celui de χ_f)

7) S'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^2 = f$, alors $g^{2p-2} = f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$

Par contre, $g^{2p} = f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$. g est donc nilpotent, et par le même raisonnement qu'en 3), $\Pi_g = X^d$, avec $d \in [\![1, n]\!]$;

comme X^{2p-2} n'annule pas g, $2p-2 < d \leqslant n \iff 2p-1 \leqslant d \leqslant n$, d'où $2p-1 \leqslant n$.

Exercice II

1) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$,, $z \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$. Etablir les relations suivantes :

a) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $z \in \mathbb{C}$. Montrons que $\mathrm{Sp}(zA) = z\mathrm{Sp}(A)$.

Soit $\mu \in z\mathrm{Sp}(A)$, il existe λ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé tels que $\mu = z\lambda$. On a $(zA)(x) = z(Ax) = (z\lambda)x$ donc $\mu = z\lambda \in \mathrm{Sp}(zA)$. On a montré que $\boxed{z\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Sp}(zA)}$.

Montrons maintenant que $\mathrm{Sp}(zA) \subset z\mathrm{Sp}(A)$. Remarquons, que cela est vrai si $z = 0$ puisque $\mathrm{Sp}(0A) = \mathrm{Sp}(0_n) = \{0\} = 0\mathrm{Sp}(A)$. Si on suppose que $z \neq 0$, soit $\mu \in \mathrm{Sp}(zA)$, il existe x un vecteur propre associé tel que $(zA)(x) = \mu x$. Cela implique que $z(Ax) = \mu x$ et donc $(Ax) = \frac{\mu}{z}x$. Cela implique que $\frac{\mu}{z} \in \mathrm{Sp}(A)$ et donc $\mu \in z\mathrm{Sp}(A)$. Finalement $\boxed{\mathrm{Sp}(zA) \subset z\mathrm{Sp}(A)}$.

On a montré que $\mathrm{Sp}(zA) = z\mathrm{Sp}(A)$. En prenant les modules, on obtient que $\{|\lambda| \ , \ \lambda \in \mathrm{Sp}(zA)\} = |z|\{|\lambda| \ , \ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$ et donc $\boxed{\rho(zA) = |z|\rho(A)}$.

b) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On sait que A est trigonalisable. Elle est semblable à une matrice T dont les éléments diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres (comptées avec multiplicités) de A et de T. Soit $k \in \mathbb{N}$, A^k est semblable à T^k. On en déduit que

$$\mathrm{Sp}(A^k) = \mathrm{Sp}(T^k) = \{\lambda^k \ , \ \lambda \in \mathrm{Sp}(T)\} = \{\lambda^k \ , \ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}.$$

En prenant les modules puis le max, on obtient $\boxed{\rho(A^k) = \rho(A)^k}$.

c) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ telle que $|\lambda| = \rho(A)$ et x un vecteur propre (non nul) associé à la valeur propre λ. On a alors
$$\frac{||Ax||_1}{||x||_1} = \frac{||\lambda x||_1}{||x||_1} = |\lambda|.$$
On en déduit que $\boxed{||A|| = \sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \geqslant |\lambda| = \rho(A)}$.

d) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}$. En utilisant les deux propriétés démontrées ci-dessus,
$$\rho(A)^k = \rho(A^k) \leqslant ||A^k||.$$

2) a) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et C un réel strictement positif. On veut montrer l'équivalence $\|M\| \leqslant C \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}^n : \|Mx\|_1 \leqslant C\|x\|_1$. Procédons par double implication

— $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $||M|| \leqslant C$. Soit x un vecteur de $\mathbb{C}^n$.
Si $x = 0$, on vérifie bien que $||Mx||_1 = ||0||_1 = 0 \leqslant C.0 = c||x||_1$.
Si $x \neq 0$, on a alors
$$\frac{||Mx||_1}{||x||_1} \leqslant ||M|| \leqslant C.$$
On obtient l'inégalité voulue en multipliant par $||x||_1$.

— $\boxed{\Leftarrow}$ Soit x un vecteur de $\mathbb{C}^n$ non nul. Par hypothèse, $||Mx||_1 \leqslant C||x||_1$ donc $\frac{||Mx||_1}{||x||_1} \leqslant C$. On voit que C est **un** majorant de $\left\{\frac{||Mx||_1}{||x||_1}\ ,\ x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\right\}$. Donc $\boxed{||M|| \leqslant C}$.

b) On veut montrer que l'application $M \mapsto \|M\|$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

— On vérifie que pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $||M||$ est la borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}_+$ donc $||M|| \geqslant 0$.

— Si $M = 0_n$ alors pour tout vecteur x non nul de $\mathbb{C}^n$, $Mx = 0$ et donc $\frac{||Mx||_1}{||x||_1} = 0$. On en déduit que $||M||_1 = 0$.
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $||M|| = 0$. D'après la question 2.a) on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $||Mx||_1 \leqslant 0$. Cela implique que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $Mx = 0$ et donc que $M = 0_n$.

— Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On remarque pour commencer que si $\lambda = 0$ alors $||\lambda M|| = ||0_n|| = 0 = |\lambda|||M||$.
On suppose donc que $\lambda \neq 0$.
Soit $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $||x||_1 = 1$,
$$||(\lambda M)x||_1 = |\lambda|||Mx||_1 \leqslant |\lambda|||M||.$$
On en déduit que $||\lambda M|| \leqslant |\lambda|||M||$.
En utilisant ce qui précède on a
$$||M|| = \left|\left|\frac{1}{\lambda}(\lambda M)\right|\right| \leqslant \left|\frac{1}{\lambda}\right| ||\lambda M||$$
En multipliant par $\lambda|$ on obtient que $||\lambda M|| \geqslant |\lambda|||M||$. Finalement les deux inégalités nous donnent que $||\lambda M|| = |\lambda|||M||$.

— Soit M_1, M_2 deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $||x||_1 = 1$.
$$||(M_1 + M_2)x||_1 = ||M_1x + M_2x||_1 \leqslant ||M_1x||_1 + ||M_2x||_1 \leqslant ||M_1|| + ||M_2||.$$
On en déduit que $||M_1 + M_2|| \leqslant ||M_1|| + ||M_2||$.

On a bien montré que $\boxed{M \mapsto ||M|| \text{ est une norme sur } \mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$.

3) Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $||x||_1 = 1$. En utilisant à chaque fois 2.a) on a $||Bx||_1 \leqslant ||B||||x||_1$ puis $||A(Bx)||_1 \leqslant ||A||.||Bx||_1$. On en déduit que
$$||(AB)x||_1 = ||A(Bx)||_1 \leqslant ||A|| \times ||B||||x||_1$$
Toujours en utilisant 2.a) cela implique que $\boxed{||AB|| \leqslant ||A|| \times ||B||}$

4) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{i,j}$ le coefficient de A d'indice de ligne i et d'indice de colonne j et on pose $K = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Le vecteur Ax est le vecteur $(y_1, \ldots, y_n)$ où, pour tout i compris entre 1 et n, $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$.

$$
\begin{aligned}
||Ax||_1 &= \sum_{i=1}^{n} |y_i| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) |x_j| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} K |x_j| \\
&\leqslant K ||x||_1
\end{aligned}
$$

En utilisant 2.a) on en déduit que $\boxed{||A|| \leqslant K = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right)}$

Pour montrer finalement que $||A|| = K$. Il suffit de trouver un vecteur x (non nul) tel que $\frac{||Ax||_1}{||x||_1} = K$ car cela impliquera que $||A|| \geqslant K$.

Notons, j_0 un entier tel que $K = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j_0}|$ et considérons le vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ où $x_{j_0} = 1$ et $x_j = 0$ pour $j \neq j_0$. Par les formules usuelle Ax est le vecteur $(a_{1,j_0}, \ldots, a_{n,j_0})$ de sorte que $||Ax||_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j_0}| = K$. Comme de plus $||x||_1 = 1$ on a bien $\frac{||Ax||_1}{||x||_1} = K$.

5) a) Comme P_b est diagonale, $P_b^{-1} = P_{b^{-1}} = \mathrm{Diag}(1, b^{-1}, \ldots, b^{-(n-1)})$.

On remarque alors que multiplier à gauche une matrice A par une matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ revient à mutliplier la ligne i de A par λ_i. De même, multiplier à droite une matrice A par la même matrice diagonale revient à multiplier la colonne j de A par λ_j.

De ce fait, pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, si on note $a'_{ij}(b)$ le coefficient ligne i et colonne j de $P_b^{-1} A P$, on a

$$
a'_{ij}(b) = b^{-(i-1)} a_{ij} b^{j-1} = a_{ij} b^{j-i}.
$$

On fait tendre b vers 0. Si $i = j$, $a'_{ij}(b) = a_{ij}$; si $i > j$ alors $a_{ij} = 0$ et donc $a'_{ij}(b) = 0$ et pour finir, si $j > i$ alors $\lim\limits_{b \to 0} a'_{ij}(b) = 0$. Notons que cela signifie que $\lim\limits_{b \to 0} P_b^{-1} A P_b = \mathrm{Diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$.

b) Notons $\alpha = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |a_{i,i}|$ qui est un réel positif strictement inférieur à 1 par hypothèse. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha + \varepsilon < 1$.

On sait alors que pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $j > i$, $b \mapsto a'_{i,j}(b)$ tend vers 0 quand b tend vers 0. On peut donc trouver $b_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout (i,j), $|a'_{i,j}(b_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{n}$.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$,

$$
\sum_{i=1}^{n} |a'_{ij}(b_0)| = \sum_{i<j} |a'_{ij}(b_0)| + |a'_{jj}(b_0) + \sum_{i>j} |a'_{ij}(b_0)| \leqslant 0 + \alpha + n \frac{\varepsilon}{n} \leqslant \alpha + \varepsilon < 1.
$$

On en déduit que

$$||P_{b_0}^{-1}AP_{b_0}|| = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a'_{i,j}(b_0)|\right) < 1.$$

c) En utilisant la question 3), par une récurrence immédiate, on voit qu'en posant $A' = P_{b_0}^{-1}AP_{b_0}$, pour tout entier $k \geqslant 0$, $||(A')^k|| \leqslant ||A'||^k$. Comme $||A'|| < 1$ d'après la question précédente, $\lim\limits_{k\to\infty} ||(A')^k|| = 0$.
Maintenant, pour tout $k \geqslant 0$, $||A^k|| = ||P_{b_0}(A')^kP_{b_0}^{-1}|| \leqslant ||P_{b_0}|| \times ||P_{b_0}^{-1}|| \times ||(A')^k||$ d'après la question 3). On en déduit que $\lim\limits_{k\to\infty} ||A^k|| = 0$ ce qui signifie que $\boxed{\text{la suite } (A^k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0}$.
La suite (A^k) converge vers 0 pour la norme $||.||$ et donc pour toutes les normes car $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension finie.

6) Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) < 1$. On peut trigonaliser A, précisément, il existe une matrice inversible Q telle que $Q^{-1}AQ = T$ soit triangulaire supérieure. De plus, les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres (comptées avec multiplicités) de A. Ils sont donc tous de module strictement inférieur à 1. En utilisant la question 5) on en déduit que la suite $(T^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 et donc la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ aussi puisque pour tout entier k non nul,

$$||A^k|| = ||QT^kQ^{-1}|| \leqslant ||Q|| \times ||Q^{-1}|| \times ||T^k||.$$

7) Soit x un réel strictement supérieur à $\rho(A)$. D'après la question 1.a), $\rho\left(\frac{A}{x}\right) = \frac{\rho(A)}{x} < 1$. En utilisant la question précédente, on obtient que $\left(\left(\frac{A}{x}\right)^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 et donc $x \in E_A$. Cela montre que $\boxed{]\rho(A), +\infty[\subset E_A}$.
Soit $x \in]0, \rho(A)]$, on veut montrer que $x \notin E_A$ c'est-à-dire que la suite $\left(\left(\frac{A}{x}\right)^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0.
D'après la question 1.d), $\left|\left|\left(\frac{A}{x}\right)^k\right|\right| \geqslant \rho\left(\frac{A}{x}\right)^k = \left(\frac{\rho(A)}{x}\right)^k \geqslant 1$ car $\frac{\rho(A)}{x} \geqslant 1$. De ce fait, la suite $\left(\left(\frac{A}{x}\right)^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0.
On a bien montré que $E_A =]\rho(A), +\infty[$.

8) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a vu que $||A^k|| \geqslant \rho(A^k) = \rho(A)^k$ donc $||A^k||^{1/k} \geqslant (\rho(A)^k)^{1/k} = \rho(A)$.
Soit $\varepsilon > 0$, d'après la question précédente, $\rho(A) + \varepsilon \in E_A$ donc $\left(\left(\frac{A}{\rho(A)+\varepsilon}\right)^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Il existe donc un rang N_ε tel que pour $k \geqslant N_\varepsilon$, $\left|\left|\left(\frac{A}{\rho(A)+\varepsilon}\right)^k\right|\right| \leqslant 1$. Cela implique $||A^k|| \leqslant (\rho(A) + \varepsilon)^k$ puis $||A^k||^{1/k} \leqslant \rho(A) + \varepsilon$.
Finalement, cela montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_ε tel que pour $k \geqslant N_\varepsilon$, $\rho(A) \leqslant ||A^k||^{1/k} \leqslant \rho(A) + \varepsilon$. C'est-à-dire $\boxed{\lim_{k\to+\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)}$.