Partie I - Généralités

1) a) la suite $(\frac{1}{(n+1)^2})$ vérifie $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ car la série entière $\sum(x \mapsto a_n x^n)$ converge normalement sur $[-1,1]$, donc sa somme est continue sur cet intervalle puisque les f_n sont continues sur cet intervalle. Son rayon de convergence est ainsi au moins égal à 1, et au plus égal à 1 car $a_n\rho^n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ pour tout $\rho > 1$.

   b) la suite $((-1)^n)$ ne vérifie pas $(\mathscr{P}_1)$ et vérife $(\mathscr{P}_2)$ car $f(x) = \frac{1}{1+x} \underset{x\to 1}{\to} \frac{1}{2}$. (Là encore, le rayon de convergence est bien égal à 1)

   c) La suite constante (1) ne vérifie ni $(\mathscr{P}_1)$ ni $(\mathscr{P}_2)$;

   d) Pour $(a_n) = (1)$, la série $\sum(x \mapsto x^n)$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $]-1,1[$ car sinon, par le théorème de la double limite, la série $\sum(\lim_{x\to 1^-} x^n)$ convergerait, mais elle diverge grossièrement.

2) Si la série $\sum a_n$ est absolument convergente, alors la série entière $\sum(x \mapsto a_n x^n)$ est normalement convergente sur $[-1,1]$, donc uniformément convergente sur cet intervalle, donc par le théorème de la double limite, la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to 1} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$

3) $|a_n| \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ donc la série $\sum(a_n)$ converge absolument. Soit $f : x \in]-1,1[\mapsto \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n x^n$.

Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x^n}{n-1} - \frac{x^n}{n}\right) \\ &= -x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^{n-1}}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n} \\ &= x\ln(1-(-x)) - (-\ln(1-(-x)) - \frac{-x}{1})) \\ &= (1+x)\ln(1+x) - x \end{aligned}$$

Ainsi, par la question précédente, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-}(1+x)\ln(1+x) - x = 2.\ln 2 - 1$.

Partie II - Théorème d'Abel

4) a) Soit $x \in [0,1]$

$$\sum_{p=1}^{+\infty}(r_{n+p-1} - r_{n+p})x^{n+p} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_{n+p}x^{n+p} = R_n(x)$$

   b) Soit $x \in [0,1[$.

$$R_n(x) = \sum_{p=1}^{+\infty}(r_{n+p-1} - r_{n+p})x^{n+p} = x\sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p-1}x^{n+p-1} - \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p}x^{n+p} = r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1)\sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p}x^{p-1}$$

   Dans le calcul ci-dessus, on n'a pas écrit de sommes de séries divergentes car (r_k) convergeant (vers zéro), elle est bornée donc $r_k x^k = O(x^k)$ et ainsi $\sum(r_k x^k)$ converge absolument.

   c) Soit un réel $\varepsilon > 0$. Comme la série $\sum a_n$ converge, $r_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, donc par définition de la limite, il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$ et tout entier naturel p on ait $|r_{n+p}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour tout entier $n \geqslant n_0$ et pour tout réel $x \in [0,1[$,

$$|R_n(x)| \leqslant |r_n|x^{n+1} + |x^{n+1}|.|1-x|.\frac{\varepsilon}{2}\sum_{p=1}^{\infty} x^{p-1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\frac{1}{1-x} = \varepsilon$$

De plus,

$$|R_n(1)| = |r_n| \leqslant \frac{\epsilon}{2} \leqslant \epsilon$$

d) D'après ce qui précède, $\forall n \geqslant n_0,\ ||R_n||_{\infty,[0,1]} \leqslant \varepsilon$.
Ainsi par définition de la limite, $||R_n||_{\infty,[0,1]} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Donc la suite (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$. Donc la série entière $\sum(x \mapsto a_n x^n)$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
Ainsi f est continue sur $[0,1]$, donc f admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

5) Par contraposée, la série $\sum a_n$ diverge si f n'a pas de limite finie en 1^-, et donc en particulier si $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

6) arctan est la primitive nulle en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, donc

$$\forall x \in]-1,1[,\ \arctan x = \arctan x - \arctan 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Comme la série de terme général $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est alternée et comme la suite $(|a_n|)$ décroît et converge vers 0, la série $\sum(a_n)$ converge par le théorème des séries alternées.
Par la question précédente, $\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

7) a) Le produit de Cauchy de deux séries convergentes peut être une série divergente. Pour trouver un exemple, il faut qu'au moins un des facteurs du produit ne soit pas une série absolument convergente d'après le rappel précédent. De fait, un théorème (hors programme), le théorème de Mertens, dit que le produit de Cauchy de deux séries convergentes converge lorsqu'au moins un des facteurs converge absolument. On va donc utiliser deux séries semi-convergentes (c-à-d convergentes et non absolument convergentes).
La série proposée converge par critère spécial des séries alternées. Le terme général du produit de Cauchy est ici : $w_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{(-1)^n}{\big(k(n-k)\big)^{1/4}}$. (poser $u_0 = v_0 = 0$)
Or $k(n-k) \leqslant \dfrac{n^2}{4}$ $\big($étude des variations, ou mieux : $(n-2k)^2 \geqslant 0\big)$ et par conséquent $|w_n| \geqslant \dfrac{\sqrt{2}(n-1)}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ donc (w_n) ne converge pas vers zéro (sinon $0 \geqslant \infty$ par passage aux limites dans les inégalités larges) ; ce qui montre que la série de terme général w_n diverge grossièrement.

b) Commençons par remarquer que le thérorème d'Abel reste vrai pour une série entière de rayon R strictement supérieur à 1, car alors sa somme est continue sur $]-R,R[$ donc est continue en 1.
Puisque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, les séries entières $\sum u_n\, x^n$ et $\sum v_n\, x^n$ ont un rayon de convergence au moins égal à 1. Notons R le plus petit des rayons de convergence de ces deux séries. D'après le cours, le rayon de convergence de $\sum w_n\, x^n$ est au moins R. Si l'on note $U(x)$, $V(x)$, $W(x)$, les sommes respectives, on a : $U(x)\,V(x) = W(x)$ pour tout $x \in [0,R[$.
D'après le théorème d'Abel appliqué à chacune des trois séries, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, $U(x)$ tend vers $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$, $V(x)$ tend vers $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$, $W(x)$ tend vers $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n$. Par unicité de la limite, le produit des deux premières sommes est égale à la troisième.

Partie III - Réciproque du théorème d'Abel

8) La question 1)b) montre que la réciproque du théorème d'Abel est fausse.

9) Puisque les coefficients sont positifs, $\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \leqslant f(x)$ pour tout $x \in [0,1[$;
en outre, la fonction f est croissante sur $[0,1[$, d'où $f(x) \leqslant \lim_{x\to 1^-} f(x)$ pour tout $x \in [0,1[$.
On a donc : $\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \leqslant \lim_{x\to 1^-} f(x)$ pour tout $x \in [0,1[$. En faisant tendre x vers 1 dans cette dernière inégalité, on obtient une majoration de la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum a_n$ qui converge donc.