Dans tout le problème, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que la série entière $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x ait pour rayon de convergence 1. On désigne alors par $\sum a_n$ la série de terme général et par f la fonction définie sur l'intervalle $]-1,1[$ par : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On désigne par $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ les deux propriétés suivantes possibles de la suite (a_n) :
- $(\mathscr{P}_1)$: la série $\sum a_n$ converge.
- $(\mathscr{P}_2)$: la fonction f admet une limite finie, notée $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Partie I - Généralités

1) En utilisant des développements en série entière « usuels », donner dans chaque cas, un exemple de suite (a_n) telle que :
   a) la suite (a_n) vérifie $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$;
   b) la suite (a_n) ne vérifie pas $(\mathscr{P}_1)$ et vérife $(\mathscr{P}_2)$;
   c) la suite (a_n) ne vérifie ni $(\mathscr{P}_1)$ ni $(\mathscr{P}_2)$;
   d) La série $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $]-1,1[$ (justifier).

   On rappelle que dans tous les cas, la série entière $\sum a_n x^n$ doit avoir un rayon de convergence égal à 1.
2) On suppose que la série $\sum a_n$ est absolument convergente ; montrer alors que la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$
3) Exemple : Déduire de la question précédente la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

   On pourra utiliser une décomposition en éléments simples.

Partie II - Théorème d'Abel

4) On suppose dans cette question que la série $\sum a_n$ converge. On va montrer qu'alors la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures (théorème d'Abel). On pose $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n$ et pour tout $x \in [0,1], R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$.
   a) Simplifier, pour tout $x \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p}$.
   b) En déduire que, pour tout $x \in [0,1[$, $R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1)\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{p-1}$.
   c) Soit un réel $\varepsilon > 0$, justifier qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$ et tout entier naturel p on ait $|r_{n+p}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, puis que : pour tout entier $n \geqslant n_0$ et pour tout réel $x \in [0,1], |R_n(x)| \leqslant \varepsilon$.
   d) Conclure que la fonction f admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.
5) Que peut-on dire de la série $\sum a_n$ si $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$?
6) Exemple : Retrouver le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \arctan x$ puis utiliser le théorème d'Abel pour écrire $\frac{\pi}{4}$ comme somme d'une série numérique.

7) Application : On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente.

a) Le produit de Cauchy de deux séries convergentes est-elle une série convergente ?

On pourra considérer le cas où $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{4}}}$ *pour* $n \geqslant 1$.

b) Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de nombres réels, on pose pour n entier naturel, $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ et on suppose que les trois séries $\sum u_n$ $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent. Montrer, à l'aide du théorème d'Abel, qu'alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Partie III - Réciproque du théorème d'Abel

8) Justifier que la réciproque du théorème d'Abel est fausse.

On cherche à rajouter une condition $(\mathscr{Q})$ à la condition $(\mathscr{P}_2)$ de telle sorte que si (a_n) vérifie $(\mathscr{P}_2)$ et $(\mathscr{Q})$, alors elle vérifie $(\mathscr{P}_1)$.

9) On prend pour la propriété $(\mathscr{Q})$: pour tout entier $n \geqslant 0$, $a_n \geqslant 0$. Montrer que si $a_n \geqslant 0$ vérifie les propriétés $(\mathscr{P}_2)$ et $(\mathscr{Q})$, alors elle vérifie la propriété $(\mathscr{P}_1)$.

On pourra montrer que pour tout entier n, $\sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant \lim_{x \to 1^-} f(x)$.