*Calculatrices interdites. L'exercice et le problème sont indépendants.*

## Exercice

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$.
Pour toute suite $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles positives on pose

$$N_u : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ P = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k & \mapsto & \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} u_k|a_k| \end{array}$$

(ces sommes sont à support fini et peuvent s'écrire aussi $\sum\limits_{k=0}^{deg(P)}$, elles ne posent aucun problème de convergence)

1) Montrer que pour toute suite $u$ à valeurs strictement positives, $N_u$ est une norme.
2) Soit $u, v$ deux suites à valeurs strictement positives. Montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $N_u \leqslant CN_v$ si et seulement si $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$.

   En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la norme $N_u$ soit équivalente à la norme $N_v$.

On considère de plus la norme

$$N : P \mapsto \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$$

On note $\underline{1}$ la suite constante égale à 1.

3) a) Déterminer une constante $K \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $N \leqslant KN_{\underline{1}}$.
   b) Les normes $N$ et $N_{\underline{1}}$ sont-elles équivalentes ?
4) Soit $d \in \mathbb{N}$ et $a_1, \ldots, a_{d+1}$ des éléments deux à deux distincts de $[0, 1]$
   a) Déterminer des polynômes $L_1, \ldots, L_{d+1}$ de $\mathbb{R}_d[X]$ tels que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_d[X]$,
   $$P = \sum_{i=1}^{d+1} P(a_i)L_i$$
   b) En déduire, sans admettre l'équivalence de toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie, que les restrictions de $N_{\underline{1}}$ et $N$ à $\mathbb{R}_d[X]$ sont équivalentes.

## Problème

# Notations et définitions

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $n$ est un entier naturel non nul.

On note $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées de taille $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. La matrice unité est notée $I_n$ et on désigne par $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour toute matrice $A$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $A^T$ la transposée de la matrice $A$, $\mathrm{rg}(A)$ son rang, $\mathrm{tr}(A)$ sa trace, $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique, $\pi_A$ son polynôme minimal et $\mathrm{sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbb{K}$.

Dans tout le problème, $E$ désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension finie $n$, et $\mathscr{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de $E$. On note $f$ un endomorphisme de $E$.

On note $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{k+1} = f^k \circ f = f \circ f^k$.

Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m$, $Q(f)$ désigne l'endomorphisme $a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_m f^m$. On note $\mathbb{K}[f]$ la sous-algèbre commutative de $\mathscr{L}(E)$ constituée des endomorphismes $Q(f)$ quand $Q$ décrit $\mathbb{K}[X]$.

De même, on utilise les notations suivantes, similaires à celles des matrices, pour un endomorphisme $f$ de $E$ : $\mathrm{rg}(f),\ \mathrm{tr}(f),\ \chi_f,\ \pi_f$ et $\mathrm{sp}(f)$.

Enfin, on dit que $f$ est *cyclique* si et seulement s'il existe un vecteur $x_0$ dans $E$ tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de $E$.

# I. Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Montrer que $M$ et $M^T$ ont même spectre.
2) Montrer que $M^T$ est diagonalisable si et seulement si $M$ est diagonalisable.

## I.B. Matrices compagnons

3) Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. On considère la matrice

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Déterminer en fonction de $Q$ le polynôme caractéristique de $C_Q$.

4) Soit $\lambda$ une valeur propre de ${C_Q}^T$. Déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

### I.C. Endomorphismes cycliques

5) Montrer que $f$ est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}$ de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est de la forme $C_Q$, où $Q$ est un polynôme unitaire de degré $n$.
6) Soit $f$ un endomorphisme cyclique. Montrer que $f$ est diagonalisable si et seulement si $\chi_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.
7) Montrer que si $f$ est cyclique, alors $(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathscr{L}(E)$ et le polynôme minimal de $f$ est de degré $n$.

### I.D. Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

8) On ne suppose plus $f$ cyclique. Soit $x$ un vecteur non nul de $E$. Montrer qu'il existe un entier $p$ strictement positif tel que $\Big($la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre et il existe un $p$-uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0_E\Big)$$

9) Justifier que $\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est stable par $f$.
10) Montrer que $X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \cdots + \alpha_0$ divise le polynôme $\chi_f$.
11) Retrouver que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.

## II. Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

On appelle commutant de $f$ l'ensemble $C(f) = \{g \in \mathscr{L}(E) /\ f \circ g = g \circ f\}$.

12) Montrer que $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$.

### II.A. Commutant d'un endomorphisme cyclique

On suppose que $f$ est cyclique et on choisit un vecteur $x_0$ dans $E$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de $E$.

Soit $g \in C(f)$, un endomorphisme qui commute avec $f$.

13) Justifier l'existence de $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ de $\mathbb{K}$ tels que

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$$

14) Montrer alors que $g \in \mathbb{K}[f]$.
15) Établir que $g \in C(f)$ si et seulement s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$.

## II.B. Décomposition de Frobenius

On se propose de démontrer le théorème de décomposition de Frobenius : toute matrice est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont des matrices compagnons.
On note $d$ le degré de $\pi_f$.

16) Soit $x \in E$. On note $I_{f,x} = \{P \in \mathbb{K}[X]/\ P(f)(x) = 0_E\}$.

   a) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire noté $\pi_{f,x} \in \mathbb{K}[X]$ tel que $I_{f,x} = \pi_{f,x}\mathbb{K}[X]$ et que $\pi_{f,x}$ divide $\pi_f$.

   b) On note $d_x$ le degré de $\pi_{f,x}$. Montrer que $(x, f(x), \dots, f^{d_x-1}(x))$ est libre.

17) a) Montrer que si la réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_r$ de $E$ est un sous-espace vectoriel, alors l'un des sous-espaces $F_i$ contient tous les autres.

   b) En déduire qu'il existe un vecteur $x_1$ de $E$ tel que $d_{x_1} = d$.
   *On pourra considérer les sous-espaces vectoriels* $\ker(\pi_{f,x}(f))$.

On considère $x_1$ un élément de $E$ tel que $d_{x_1} = d_x$.
On pose $e_1 = x_1$, $e_2 = f(x_1)$, ..., $e_d = f^{d-1}(x_1)$ et $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_d)$.

18) Montrer que $E_1 = \{P(f)(x_1)/\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ et que $E_1$ est stable par $f$.

On note $\psi_1$ l'endomorphisme induit par $f$ sur le sous-espace vectoriel $E_1$,

$$\psi_1 \ : \ \begin{cases} E_1 \to E_1 \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

19) Justifier que $\psi_1$ est cyclique. En déduire que si $d = n$ alors $f$ est cyclique.

On complète, si nécessaire, $(e_1, e_2, \dots, e_d)$ en une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $E$. Soit $\Phi$ la $d$-ième forme coordonnée qui à tout vecteur $x$ de $E$ associe sa coordonnée suivant $e_d$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. On note $F = \{x \in E/\ \forall i \in \mathbb{N},\ \Phi(f^i(x)) = 0\}$.

20) Montrer que $F$ est stable par $f$ et que $E_1$ et $F$ sont en somme directe.

Soit $\Psi$ l'application linéaire de $E$ dans $\mathbb{K}^d$ définie, pour tout $x \in E$, par

$$\Psi(x) = (\Phi(f^i(x)))_{0 \leqslant i \leqslant d-1} = (\Phi(x), \Phi(f(x)), \dots, \Phi(f^{d-1}(x)))$$

21) Montrer que $\Psi$ induit un isomorphisme entre $E_1$ et $\mathbb{K}^d$.

22) Montrer que $E = E_1 \oplus F$.

23) En déduire qu'il existe $r$ sous-espaces vectoriels de $E$, notés $E_1, \dots, E_r$, tous stables par $f$, tels que :
   — $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$ ;
   — pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, l'endomorphisme $\psi_i$ induit par $f$ sur le sous-espace vectoriel $E_i$ est cyclique ;
   — si on note $P_i$ le polynôme minimal de $\psi_i$, alors $P_{i+1}$ divise $P_i$ pour tout entier $i$ tel que $1 \leqslant i \leqslant r-1$.

## II.C. Commutant d'un endomorphisme quelconque

24) Montrer que la dimension de $C(f)$ est supérieure ou égale à $n$.

25) On suppose que $f$ est un endomorphisme tel que l'algèbre $C(f)$ est égale à $\mathbb{K}[f]$. Montrer que $f$ est cyclique.