Équations différentielles

Rappels de première année

Lycée Chateaubriand

Table des matières

1. Généralités
2. Équations linéaires du premier ordre
3. Équations linéaires du deuxième ordre

Définition 1 (Équations différentielles linéaires)

Soit n un entier non nul et I un intervalle.

1. *Un équation différentielle linéaire d'ordre n est une équation de la forme :*

$$\alpha_n(t)y^{(n)} + \cdots + \alpha_1(t)y' + \alpha_0(t)y = \beta(t),$$

   où les $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et β sont des fonctions définies sur I.

   - *Les fonctions $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ s'appellent les coefficients de l'équation différentielle.*
   - *La fonction β s'appelle le second membre.*
   - *L'équation différentielle est dite homogène si β est la fonction nulle.*

2. *La forme résolue d'une équation différentielle linéaire d'ordre n est*

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t).$$

- On associe à une équation

$$\alpha_n(t)y^{(n)} + \cdots + \alpha_1(t)y' + \alpha_0(t)y = \beta(t), \tag{E}$$

son *équation homogène associée*. C'est l'équation différentielle qui a les mêmes coefficients mais dont le second membre est nul

$$\alpha_n(t)y^{(n)} + \cdots + \alpha_1(t)y' + \alpha_0(t)y = 0 \tag{H}$$

- On considère une équation différentielle linéaire

$$\alpha_n(t)y^{(n)} + \cdots + \alpha_1(t)y' + \alpha_0(t)y = \beta(t) \tag{E}$$

Si la fonction α_n ne s'annule pas sur l'intervalle I on peut lui associer une équation différentielle sous forme résolue

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t)$$

en posant pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $a_i : t \mapsto -\dfrac{\alpha_i(t)}{\alpha_n(t)}$ et $b : t \mapsto \dfrac{\beta(t)}{\alpha_n(t)}$.

Théorème 1 (Structure de l'ensemble des solutions)

Soit (E) une équation différentielle linéaire d'ordre n définie sur un intervalle I et (H) l'équation homogène associée.

1. L'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de (H) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^{(n)}(I, \mathbb{K})$.
2. S'il existe une solution f_0 de (E) on a $\mathscr{S}_E = \{f + f_0 \mid f \in \mathscr{S}_H\}$.
   On dit alors que $\mathscr{S}_E$ est un espace affine de direction $\mathscr{S}_H$. C'est-à-dire
   $$f \in \mathscr{S}_E \iff (f - f_0) \in \mathscr{S}_H.$$

Théorème 2 (Equation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène)

Soit I un intervalle et $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Les solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre résolue

$$y' = a(t)y$$

sont les fonctions f définies sur I par :

$$\forall x \in I, \quad f(t) = \lambda.e^{A(t)},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \mapsto A(t)$ est une primitive de a.

Voici alors la méthode à appliquer pour résoudre l'équation (E).

$$y' = a(t)y(t) + b(t) \tag{E}$$

1. On exprime l'équation homogène associée (H).
2. On résout (H).
3. On trouve une solution particulière de (E)
4. On exprime la forme générale des solutions.

Proposition 3 (Variation de la constante)

Les solutions de l'équation différentielle linéaire résolue du premier ordre sur I

$$y' = a(t)y + b(t)$$

où a et b sont des fonctions continues sur I sont de la forme

$$t \mapsto \left(\int^t b(u)e^{-A(u)}\right) e^{A(t)} + Ke^{A(t)}.$$

On veut résoudre

$$y' = -y + \cos t \tag{E}$$

L'équation homogène associée est

$$y' = -y. \tag{H}$$

Les solutions de l'équation homogène sont

$$\mathscr{S}_H = \{t \mapsto \lambda e^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

On va chercher la solution particulière sous la forme :

$$f : t \mapsto \lambda(t)e^{-t} \text{ où } \lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

est une fonction dérivable.

Dés lors on a

$$\begin{aligned} f \text{ vérifie (E)} \quad & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) + f(t) = \cos t \\ & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda'(t)e^{-t} - \lambda(t)e^{-t} + \lambda(t)e^{-t} = \cos t \\ & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda'(t)e^{-t} = \cos t \\ & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda'(t) = e^{t} \cos t \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'a trouver une primitive de $e^t \cos t$. Pour cela on remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^t \cos t = \mathrm{Re}\left(e^{(1+i)t}\right).$$

On en déduit qu'une primitive de $e^t \cos t$ est donnée par

$$\mathrm{Re}\left(\frac{e^{(1+i)t}}{1+i}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{(1-i)e^t(\cos t + i\sin t)}{2}\right) = \frac{1}{2}e^t(\cos t + \sin t).$$

On en déduit que la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$ est une solution particulière et que

$$\mathscr{S}_E = \left\{ t \mapsto \frac{1}{2}(\cos t + \sin t) + \lambda e^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Résoudre l'équation différentielle : $y' - y = e^t \ln t$

On va résoudre l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = f(t) \tag{E}$$

où a, b et c sont des **constantes** complexes avec $a \neq 0$ et f une fonction définie sur un intervalle I.

L'équation homogène associée est alors

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{H}$$

Définition 2

On appelle équation caractéristique de (H) l'équation du second degré :

$$aX^2 + bX + c = 0$$

Théorème 4 (Cas Complexe)

Avec les notations précédentes, on note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique. On a alors

- Si $\Delta \neq 0$: on note α_1 et α_2 les deux racines de l'équation caractéristique. On a
$$\mathscr{S}_H = \{t \mapsto \lambda e^{\alpha_1 t} + \mu e^{\alpha_2 t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}.$$
- Si $\Delta = 0$: on note α la racine double de l'équation caractéristique. On a
$$\mathscr{S}_H = \{t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{\alpha t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}.$$

En particulier, c'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.

Théorème 5 (Cas réel)

Avec les notations précédentes, suppose que a, b et c sont des réels. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique. On a alors

- Si $\Delta > 0$: on note α_1 et α_2 le deux racines réelles de l'équation caractéristique. On a
$$\mathscr{S}_H = \{t \mapsto \lambda e^{\alpha_1 t} + \mu e^{\alpha_2 t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$
- Si $\Delta = 0$: on note α la racine double réelle de l'équation caractéristique. On a
$$\mathscr{S}_H = \{t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{\alpha t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$
- Si $\Delta < 0$: on note $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ le deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique. On a
$$\mathscr{S}_H = \{t \mapsto e^{\alpha t}(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Là encore l'ensemble des solutions est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Théorème 6

Soit

$$ay'' + by' + cy = Ae^{\lambda t} \tag{E}$$

où A et λ sont des constantes complexes.

Il existe une solution particulière de (E) de la forme $t \mapsto Bt^{\alpha}e^{\lambda t}$ où

- $\alpha = 0$ si λ n'est pas une racine de l'équation caractéristique,
- $\alpha = 1$ si λ est une racine simple de l'équation caractéristique,
- $\alpha = 2$ si λ est une racine double de l'équation caractéristique.

On considère l'équation

$$y'' - 4y' + 3y = e^t \cos(2t) \tag{E}$$

On a $e^t \cos(2t) = \mathrm{Re}(e^{(1+2i)t})$.

On regarde alors

$$y'' - 4y' + 3y = e^{(1+2i)t} \tag{E'}$$

L'équation caractéristique est $X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$.

On voit que $(1+2i)$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique. On cherche une solution sous la forme $x \mapsto Be^{(1+2i)t}$.

On trouve que $B \in \mathbb{C}$ vérifie :

$$B((1+2i)^2 - 4(1+2i) + 3) = 1$$

D'où

$$B = -\frac{1}{4(1+i)} = -\frac{1-i}{8}.$$

On en déduit que (E') admet pour solution particulière

$$t \mapsto -\frac{1-i}{8}e^{t}(\cos(2t) + i\sin(2t)).$$

En prenant la partie réelle, on obtient que :

$$t \mapsto -\frac{1}{8}(\cos(2t) + 2\sin(2t))e^{t}$$

est une solution particulière de (E).

$$\mathscr{S} = \{t \mapsto -\frac{1}{8}(\cos(2t) + 2\sin(2t))e^{t} + \lambda e^{t} + \mu e^{3t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Résoudre l'équation différentielle : $y'' - (2\cos\theta)y' + y = e^t$ où $\theta \in \mathbb{R}$.