Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$ on pose

$$N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)dt}.$$

1. Montrer que N est une norme. *On pourra exhiber un produit scalaire sur E dont N est la norme euclidienne associée*

Corrigé

On vérifie les axiomes.

i) Il est clair que pour tout $f \in E$, $N(f) \geqslant 0$.

ii) Si $f = 0_E$ alors $N(f) = 0$. Réciproquement, si $N(f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 f'^2(t)dt = 0$ comme f'^2 est positive et **continue** f'^2 et donc f' est la fonction constante égale à 0. De ce fait f est constante et donc nulle.

iii) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et $f \in E$, on a $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.

iv) L'inégalité triangulaire est plus difficile. Le plus simple est de remarquer que

$$(f,g) \mapsto (f|g) = fg(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$$

est un produit scalaire (bilinéarité, positivité et symétrie évidentes, le caractère défini à été fait ci-dessus). On voit que N est alors la norme euclidienne associée.

2. (a) Justifier que pour $f \in E$,

$$\int_0^1 |f'(t)|dt \leqslant \sqrt{\int_0^1 (f'(t))^2 dt}.$$

Corrigé

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 fg$.

$$\int_0^1 |f'(t)|dt = \int_0^1 |f'(t)| \times 1dt \leqslant \sqrt{\int_0^1 f'^2(t)dt \times \int_0^1 1^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 f'^2(t)dt}.$$

(b) Déterminer α telle que
$$\forall f \in E \ ||f||_\infty \leqslant \alpha N(f).$$

Corrigé

Soit $x \in [0,1]$,
$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt \leqslant |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt.$$
Maintenant, $|f(0)| \leqslant N(f)$ de manière évidente et $\displaystyle\int_0^1 |f'(t)|dt \leqslant N(f)$ d'après 2.a.

Finalement $\boxed{||f||_\infty \leqslant 2N(f)}$.

3. Les normes $||.||_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Corrigé

Elles ne sont pas équivalentes.
Si on prend $f_n : x \mapsto \sin(2\pi nx)$. On a $||f_n|| = 1$. Par contre, $f_n'(x) = 2\pi n\cos(2\pi nx)$, de ce fait
$$\int_0^1 f_n'^2(t)dt = 4\pi n^2 \int_0^1 \cos(2\pi nt)^2 dt = 2\pi n^2 \int_0^1 (1+\cos(4\pi nt))dt = 2\pi n^2.$$
On voit que $\dfrac{N(f_n)}{||f_n||_\infty} \geqslant \sqrt{2\pi}n \to +\infty$.

$\boxed{\text{Les normes ne sont pas équivalentes}}$.