1. Donner les développements en séries entières au voisinage de 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$.

Corrigé

— $\forall x \in]-1,1[, \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$

Le rayon de convergence est $R = 1$.

— $\forall x \in \mathbf{R}, \operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

Le rayon de convergence est $R = +\infty$.

2. On pose $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^n dt$.

(a) Montrer que pour tout entier n, $a_{n+2} + a_n = \frac{1}{n+1}$.

Corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} + a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 t)(\tan t)^n dt = \left[\frac{(\tan t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}.$$

(b) Calculer a_0 et a_1

Corrigé

$a_0 = \frac{\pi}{4}$ et $a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t) dt = [-\ln(\cos t)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\ln 2}{2}$.

(c) On admet que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1 et on note pour $x \in]-1,1[$, $f(x)$ sa somme. Déterminer $f(x)$ en utilisant a). L'expression trouvée pourra faire apparaitre a_0 et a_1 que l'on calculera si on a le temps.

Corrigé

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ définie sur $]-1,1[$. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} x^{n+2} \\ &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} \\ &= a_0 + a_1 x - x\ln(1-x) - x^2 f(x) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x - x\ln(1-x)}{1+x^2}.$$

Remarque : On peut montrer que le rayon de convergence vaut 1 en voyant que (a_n) est décroissante donc

$$2a_{n+2} \leqslant a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1} \leqslant 2a_n$$

Donc pour $n \geqslant 2$:

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}.$$

Finalement, $a_n \sim \frac{1}{2n}$ et donc $R = 1$.