Partie I - Étude d'un endomorphisme de polynômes

1) Soit P un polynôme de degré au plus n, $\varphi(P)$ est un polynôme. De plus :
   — Si P est de degré $d < n$ alors P' est de degré au plus $d-1$. On en déduit que

   $$\deg(X(1-X)P') \leqslant 2 + (d-1) = d+1 \leqslant n \quad \text{et} \quad \deg(XP) = d+1 \leqslant n$$

   Finalement $\deg(\varphi(P)) \leqslant n$.
   — Si P est de degré n, en posant $P = \alpha X^n + Q$ où $\deg(Q) < n$, on obtient que

   $$\varphi(P) = -\alpha X^{n+1} + \alpha X^n + \alpha X^{n+1} + \varphi(Q) = \alpha X^n + \varphi(Q)$$

   En réutilisant ce qui précède, on obtient que $\deg(\varphi(P)) \leqslant n$.

2) Soit $k \in [\![0, n]\!]$,

   $$\varphi(X^k) = \frac{k}{n} X(1-X)X^{k-1} + X^{k+1} = \frac{1}{n}\left(kX^k + (n-k)X^{k+1}\right)$$

   On en déduit que la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ est

   $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & n \end{pmatrix}$$

3) a) Avec les notations de l'énoncé

   $$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{m} \frac{r_i}{X - a_i}$$

   b) Soit P un polynôme non nul et $\lambda \in \mathbb{C}$,

   $$\varphi(P) = \lambda P \iff X(1-X)P' + nXP = n\lambda P \iff X(1-X)P' = n(\lambda - X)P \iff \frac{P'}{P} = \frac{n(\lambda - X)}{X(1-X)}$$

   c) Procédons par analyse-synthèse.
   — Analyse : Soit λ une valeur propre et P un vecteur propre (non nul) associé. D'après la question précédente, $\dfrac{P'}{P} = \dfrac{n(X-\lambda)}{X(X-1)}$. En effectuant un décomposition en éléments simples sur le deuxième membre de cette égalité on obtient

   $$\frac{P'}{P} = \frac{n(X-\lambda)}{X(X-1)} = \frac{n(1-\lambda)}{X-1} + \frac{n\lambda}{X}$$

   D'après la question 3.a) les coefficients qui apparaissent dans cette décomposition en éléments simples sont des entiers naturels (ce sont les multiplicités des racines). On en déduit que nécessairement $n\lambda \in \mathbb{N}$ et $n(1-\lambda) \in \mathbb{N}$ ce qui implique que $\lambda \in \left\{\frac{k}{n} \;;\; k \in [\![0, n]\!]\right\}$.
   De plus, pour $k \in [\![0, n]\!]$, les vecteurs propres associées à $\lambda = \frac{k}{n}$ sont de la forme

   $$P = \alpha X^k (X-1)^{n-k}$$

— Synthèse : Soit $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P = X^k(X-1)^{n-k}$. D'après 3.a),

$$\frac{P'}{P} = \frac{k}{X} + \frac{n-k}{X-1} = \frac{nX-k}{X(X-1)} = \frac{n(\lambda - X)}{X(1-X)}$$

où $\lambda = \frac{k}{n}$. On en déduit par 3.b) que P est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

En conclusion, $\mathrm{Sp}(\varphi) = \left\{\frac{k}{n}\ ;\ k \in [\![0, n]\!]\right\}$ (ce que l'on pouvait voir directement sur la matrice de φ obtenue à la question 2)) et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$E_{\frac{k}{n}}(\varphi) = \mathrm{Vect}(X^k(X-1)^{n-k})$$

4) D'après ce qui précède, φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$. Il a $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes, on en déduit que φ est diagonalisable.

Partie II - Étude d'une suite de variables aléatoires

5) a) La variable aléatoire Z_2 ne peut prendre que deux valeurs 0 et 1. On a donc $Z_2(\Omega) \subset \{0, 1\}$.
De plus l'événement $(Z_2 = 0)$ correspond au fait que l'on tire au deuxième tirage la même boule qu'au premier tirage. On en déduit que $P(Z_2 = 0) = \frac{1}{n}$
Plus rigoureusement,

$$(Z_2 = 0) = (X_1 = X_2) = \bigcup_{i=1}^{n} (X_1 = i) \cap (X_2 = i)$$

On en déduit par indépendance des variables X_i que

$$P(Z_2 = 0) = \sum_{i=1}^{n} P((X_1 = i) \cap (X_2 = i)) = \sum_{i=1}^{n} P(X_1 = i) \times P(X_2 = i)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

De plus, $P(Z_2 = 1) = 1 - P(Z_2 = 0) = \frac{n-1}{n}$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in [\![1, k]\!]$. Sous l'hypothèse que l'événement $(Y_k = j)$ est réalisé, la variable aléatoire Z_{k+1} vaudra 1 si le $k+1$-ème tirage apporte une des $n-j$ boules qui n'a pas encore été tirée. C'est-à-dire $P_{(Y_k=j)}(Z_{k+1} = 1) = \frac{n-j}{n}$.
Là encore, si on veut un rédaction plus rigoureuse, on note A_j l'ensemble des k-uplets $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ d'éléments de $[\![1, n]\!]$ tels que $\mathrm{Card}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} = j$. On a alors

$$P_{(Y_k=j)}(Z_{k+1} = 1) = \frac{P((Z_{k+1} = 1) \cap (Y_k = j))}{P(Y_k = j)}$$

Or

$$(Y_k = j) = \bigcup_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in A_j} \bigcap_{i=1}^{k} (X_i = \alpha_i)$$

On en déduit, comme ci-dessus,

$$P(Y_k = j) = \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in A_j} \frac{1}{n^k}$$

De plus

$$(Z_{k+1} = 1) \cap (Y_k = j) = \bigcup_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in A_j} \bigcup_{\beta \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}} \left(\bigcap_{i=1}^{k} (X_i = \alpha_i) \cap (X_{k+1} = \beta) \right)$$

Là encore, en utilisant que les variables X_i sont indépendantes on obtient que

$$P((Z_{k+1}=1)\cap(Y_k=j)) = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in A_j}\ \sum_{\beta\notin\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}} \frac{1}{n^{k+1}} = \frac{n-j}{n}\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in A_j}\frac{1}{n^k}$$

Finalement, en faisant le quotient, $P_{(Y_k=j)}(Z_{k+1}=1) = \frac{n-j}{n}$.
On utilise alors la formule des probabilités totales en utilisant le système complet d'événements $(Y_k=j)_{1\leqslant j\leqslant k}$:

$$\begin{aligned}
P(Z_{k+1}=1) &= \sum_{j=1}^{k} P(Y_k=j)\times P_{(Y_k=j)}(Z_{k+1}=1)\\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{n-j}{n} P(Y_k=j)\\
&= \sum_{j=1}^{k} P(Y_k=j) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} jP(Y_k=j)\\
&= 1-\frac{1}{n}E(Y_k)
\end{aligned}$$

c) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On remarque que $Y_k=\sum_{j=1}^{k} Z_j$. Par linéarité de l'espérance,

$$E(Y_k)=E(\sum_{j=1}^{k} Z_j)=\sum_{j=1}^{k} E(Z_j)=\sum_{j=1}^{k} P(Z_j=1)$$

La dernière égalité vient du fait que Z_j est une variable de Bernoulli qui ne prend que les valeurs 0 et 1. La formule de la question précédente devient alors :

$$P(Z_{k+1}=1)=1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} P(Z_j=1).$$

d) Montrons par récurrence forte sur $k\in\mathbb{N}^*$ que : $P(Z_k=1)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}$.

— $\boxed{\mathrm{I}}$: Pour $k=1$, $P(Z_1=1)=1=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{0}$ par définition.

— $\boxed{\mathrm{H}}$: Soit $k\in\mathbb{N}^*$, on suppose que pour tout $j\leqslant k$, $P(Z_j=1)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{j-1}$. On a alors

$$\begin{aligned}
P(Z_{k+1}=1) &= 1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} P(Z_j=1)\\
&= 1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{j-1}\\
&= 1-\frac{1}{n}\frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)}\\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right)^{k}
\end{aligned}$$

— $\boxed{\text{C}}$: par récurrence forte, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z_k = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$.

e) Si $k \geqslant 1$,

$$E(Y_k) = n\left(1 - P(Z_{k+1} = 1)\right) = n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right)$$

Si $k = 0$, $Y_0 = 0$ et donc $E(Y_0) = 0$. La formule ci-dessus reste vraie.

6) a) Par définition de Y_0, $G_0 = 1$.
On voit que la variable Y_1 prend la valeur 1 de manière certaine donc $G_1 = X$.
La variable Y_2 prend ses valeurs dans $\{1, 2\}$, de plus $P(Y_2 = 2) = P(Z_2 = 1) = \frac{n-1}{n}$. On en déduit que $P(Y_2 = 1) = \frac{1}{n}$ et donc $G_2 = \frac{1}{n}X + \frac{n-1}{n}X^2$.

b) Soit k dans $\mathbb{N}$ et i dans $[\![0, n]\!]$. On utilise le système complet d'événements $((Y_k = j)_{0 \leqslant j \leqslant n})$. La formule des probabilités totales donne alors :

$$P(Y_{k+1} = i) = \sum_{j=0}^{n} P((Y_k = j) \cap (Y_{k+1} = i))$$

On remarque alors que si $j \notin \{i, i-1\}$, $P((Y_{k+1} = i) \cap (Y_k = j)) = 0$ car le nombre de numéros différents ne peut augmenter que de 0 ou 1 lors du $k+1$-ème tirage.
De plus, d'après la question 5)b),

$$P((Y_{k+1} = i) \cap (Y_k = i-1)) = P((Z_{k+1} = 1) \cap (Y_k = i-1)) = \frac{n - (i-1)}{n} P(Y_k = i-1)$$

et

$$P((Y_{k+1} = i) \cap (Y_k = i)) = P(Y_k = i) - P((Z_{k+1} = 1) \cap (Y_k = i)) = (1 - \frac{n-i}{n})P(Y_k = i)$$

Finalement,

$$P(Y_{k+1} = i) = \frac{i}{n}P(Y_k = i) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)P(Y_k = i-1).$$

c) Soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
G_{k+1} &= \sum_{i=0}^{n} P(Y_{k+1} = i)X^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{i}{n}P(Y_k = i) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)P(Y_k = i-1)\right] X^i \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} iP(Y_k = i)X^i + \sum_{i=0}^{n}\left(1 - \frac{i}{n}\right)P(Y_k = i)X^{i+1} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} iP(Y_k = i)(X^i - X^{i+1}) + \sum_{i=0}^{n} P(Y_k = i)X^{i+1} \\
&= \frac{1}{n}X(1 - X)G_k' + XG_k
\end{aligned}$$

d) On vient de voir que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G_{k+1} = \varphi(G_k)$. On en déduit, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $G_k = \varphi^k(G_0)$ par une récurrence immédiate.

7) a) Soit k dans $\mathbb{N}$.

$$G_k(1) = \sum_{i=0}^{n} P(Y_k = i)1^i = \sum_{i=0}^{n} P(Y_k = i) = 1$$

De même,

$$G_k'(1) = \sum_{i=0}^{n} iP(Y_k = i)1^{i-1} = \sum_{i=0}^{n} iP(Y_k = i) = E(Y_k)$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. On dérive la relation obtenue en 6.c)

$$G_{k+1}' = \frac{1}{n}(1-2X)G_k' + \frac{1}{n}X(1-X)G_k'' + G_k + XG_k'$$

On évalue en 1

$$G_{k+1}'(1) = -\frac{1}{n}G_k'(1) + 0 + G_k(1) + G_k'(1)$$

En utilisant les relations de la question précédente,

$$E(Y_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) E(Y_k) + 1.$$

c) La suite $(E(Y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. On pose γ tel que

$$\gamma = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\gamma + 1$$

c'est-à-dire $\gamma = n$. La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $u_k = E(Y_k) - n$ est alors géométrique de raison $1 - \frac{1}{n}$. Comme $u_0 = -n$, on obtient que pour tout entier k,

$$u_k = -n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$$

et donc

$$E(Y_k) = n - n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right)$$

8) Pour tout j de $[\![0, n]\!]$ on pose $P_j = X^j(1-X)^{n-j}$.

a) En utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j(1-X)^{n-j} = (X + (1-X))^n = 1 = G_0$$

b) Soit j dans $[\![0, n]\!]$:

$$P_j = X^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k}(-1)^k X^k = \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j} X^i$$

en posant $i = k + j$.

c) Soit k dans $\mathbb{N}$, on veut calculer $\varphi^k(G_0)$. On a vu dans la partie I que $(P_0, \ldots, P_n)$ était une base de vecteurs propres pour φ de $\mathbb{C}_n[X]$. On décompose donc

$$G_0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j$$

Par linéarité,

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \varphi^k(P_j) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k P_j$$

En utilisant finalement la formule de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\varphi^k(G_0) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k \left(\sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i
\end{aligned}$$

d) Soit $k \in \mathbb{N}$. Par définition de $G_k = \varphi^k(G_0)$, on en déduit que pour tout i de $[\![0, n]\!]$:

$$P(Y_k = i) = \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j}$$

Or

$$\binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \times \frac{(n-j)!}{(i-j)!(n-i)!} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{i!}{j!(i-j)!} = \binom{n}{i} \binom{i}{j}$$

On en déduit

$$P(Y_k = i) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k.$$