– Partie I : Premiers pas –

1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme S_k est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{1,2,3,4,5\}$, $(S_k = i)_{1\leqslant i\leqslant 5}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(S_{k+1}=1) = \sum_{i=1}^{5} P(S_{k+1}=1|S_k=i)P(S_k=i)$$

Il reste à remarquer que les salles $2,3,4,5$ mènent toutes à 1 avec probabilité $\frac{1}{3}$ pour en déduire

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ P(S_{k+1}=1) = \frac{1}{3}\sum_{i=2}^{5} P(S_k=i)}$$

2) On peut procéder de même pour expliciter $P(S_{k+1}=j)$ pour $j=2,3,4,5$ et obtenir

$$P(S_{k+1}=2) = \frac{1}{4}P(S_k=1)+\frac{1}{3}P(S_k=3)+\frac{1}{3}P(S_k=5)$$
$$P(S_{k+1}=3) = \frac{1}{4}P(S_k=1)+\frac{1}{3}P(S_k=2)+\frac{1}{3}P(S_k=4)$$
$$P(S_{k+1}=4) = \frac{1}{4}P(S_k=1)+\frac{1}{3}P(S_k=3)+\frac{1}{3}P(S_k=5)$$
$$P(S_{k+1}=5) = \frac{1}{4}P(S_k=1)+\frac{1}{3}P(S_k=2)+\frac{1}{3}P(S_k=4)$$

Ce qui se traduit matriciellement par

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ X_{k+1} = BX_k \text{ avec } B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}}$$

3) La somme des éléments de chaque colonne de B, et donc de chaque ligne de B^T, vaut 1. Ceci signifie que

$$B^T\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

ou encore que

$$\boxed{1 \in \mathrm{Sp}(B^T) \text{ et } \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(B^T - I_5)}$$

4) Un calcul immédiat donne $BX_0 = X_0$ et, par récurrence immédiate, $X_k = B^kX_0 = X_0$ pour tout entier k. La matrice X_k donnant la loi de S_k,

$$\boxed{\text{toutes les } S_k \text{ ont même loi dans ce cas}}$$

5) Si le rat est dans une pièce, il la quitte au temps suivant.
Ainsi, $P((S_0=1)\cap(S_1=1)) = 0$. Or $P(S_0=1)P(S_1=1) = \frac{1}{16} \neq 0$. Ainsi

$$\boxed{S_0 \text{ et } S_1 \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

– Partie II : Convergence dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ –

6) Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - I_E)$. On a $u(x) = x$ et par récurrence immédiate, $u^k(x) = x$ pour tout k. Ainsi, $r_k(x) = x$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{Ker}(u-I_E),\ r_k(x) \to x}$$

7) Soit $x \in \mathrm{Im}(u - I_E)$. Il existe y tel que $x = (u - I_E)(y)$ et donc $x = u(y) - y$. Ainsi $u^l(x) = u^{l+1}(x) - u^l(x)$ et (télescopage)

$$r_k(x) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}(u^{l+1}(x) - u^l(x)) = \frac{1}{k}(u^k(x) - x)$$

On en déduit que $\|r_k(x)\| \leqslant \frac{1}{k}(\|u^k(x)\| + \|x\|)$. Or, u contractant les normes, $\|u^k(x)\| \leqslant \|x\|$ et donc notre majorant est de limite nulle. Ceci montre que

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{Im}(u - I_E),\ r_k(x) \to 0_E}$$

8) Par théorème du rang, on a les bonnes dimensions. De plus, si $x \in \mathrm{Im}(u - I_E) \cap \mathrm{Ker}(u - I_E)$, $(r_k(x))$ est simultanément de limite x et 0_E et donc $x = 0_E$ par unicité de la limite. L'intersection est donc réduite à 0_E et la somme est directe. Finalement

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}(u - I_E) \oplus \mathrm{Im}(u - I_E)}$$

9) Soit $x \in E$. Il existe $y \in \mathrm{Ker}(u - I_E)$ et $z \in \mathrm{Im}(u - I_E)$ tels que $x = y + z$. On a alors $r^k(x) = r^k(y) + r^k(z) \to y$. $x \mapsto y$ est la projection sur $\mathrm{Ker}(u - I_E)$ de direction $\mathrm{Im}(u - I_E)$.

$$\boxed{\forall x \in E,\ r_k(x) \to p(x) \text{ avec } p \text{ projection sur } \mathrm{Ker}(u - I_E) \text{ de direction } \mathrm{Im}(u - I_E)}$$

10) Pour parler de convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on doit munir cet espace d'une norme. Comme l'espace est de dimension finie, le choix de la norme est indifférent (les normes sont équivalentes en dimension finie). Les mêmes calculs que ceux menés ci-dessus montrent que

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ R_k X \to PX$$

où P est la matrice (dans la base canonique) de la projection sur $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ de direction $\mathrm{Im}(A - I_n)$ (espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$).

Appliquons ceci aux éléments E_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$: $\forall i,\ \|R_k E_i - PE_i\| \to 0$. Comme tous les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$, on peut choisir de travailler avec la norme infinie associée à la base canonique. $\|R_k E_i - PE_i\| \to 0$ signifie alors que chaque suite des coefficients de $R_k E_i$ converge vers le coefficient associé de PE_i. Ceci signifie donc que chaque suite coefficient de R_k converge vers le coefficient de P associé. Ou encore que $R_k \to P$ au sens de la norme "maximum du module des coefficients". On a donc convergence de (R_k) vers P. Enfin, P est la matrice d'une projection et $P^2 = P$.

$$\boxed{\exists\, P/\ R_k \to P \text{ et } P^2 = P}$$

– Partie III : Matrices stochastiques –

11) Posons $V = AU$. On a

$$\forall i,\ V_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} U_j = \sum_{j=1}^n a_{i,j}$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{(C2) équivaut à } AU = U}$$

12) Soient A, B stochastiques. Par les formules de produit, $C = AB$ est à coefficients positifs (chaque $c_{i,j}$ est somme et produit de termes $\geqslant 0$). En outre $CU = ABU = AU = U$ avec la question précédente. Cette même question indique que C vérifie (C2) et est donc stochastique.

$$\boxed{\mathscr{E} \text{ est stable par multiplication}}$$

13) Soient A, B stochastiques et $\lambda \in [0, 1]$. Posons $M = \lambda A + (1 - \lambda)B$. La positivité des coefficients de A et B entraîne celle des coefficients de M. De plus $MU = \lambda AU + (1 - \lambda)BU = \lambda U + (1 - \lambda)U = U$ ce qui donne (C2) pour M qui est donc stochastique.

$$\boxed{\mathscr{E} \text{ est convexe}}$$

14) Posons $Y = AX = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. On a

$$\forall i,\ |y_i| = \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot |x_j| \leqslant \|x\|_\infty \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \|x\|_\infty$$

Ceci étant vrai pour tout i, on a

$$\boxed{\|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty \text{ pour tout } X \in \mathbb{R}^n}$$

15) Notons $B = A^p = (b_{i,j})$. La matrice B est une matrice stochastique (question 12) à coefficients > 0. Soit $X \in \mathrm{Ker}(B - I_n)$ et s un indice tel que x_s est le maximum des x_i. On a $BX = X$ et, en regardant le coefficient d'indice s de cet élément de $\mathbb{R}^n$,

$$x_s = \sum_{j=1}^n b_{i,j}x_j \leqslant x_s \sum_{j=1}^n b_{i,j} = x_s$$

(on a utilisé la positivité des $b_{i,j}$ pour dire que $b_{i,j}x_j \leqslant b_{i,j}x_s$). Si, par l'absurde, il existait un j tel que $x_j < x_s$ alors, comme $b_{i,j} > 0$, on aurait $b_{i,j}x_j < b_{i,j}x_s$ et on obtiendrait ci-dessus $x_s < x_s$ et donc une contradiction. Ceci montre que les x_j sont tous égaux et donc que $X \in \mathrm{Vect}(U)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(A^p - I_n) \subset \mathrm{Vect}(U)$. Mais A^p est une matrice stochastique (question 12) et on a donc $U \in \mathrm{Ker}(A - I_p)$. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Ker}(A^p - I_n) = \mathrm{Vect}(U) \text{ et donc } \dim(\mathrm{Ker}(A^p - I_n)) = 1}$$

16) On sait déjà que $\mathrm{Vect}(U) \subset \mathrm{Ker}(A - I_n)$ car A est stochastique. Si $AX = X$ alors par récurrence $A^kX = X$ pour tout k et en particulier $A^pX = X$. la question précédente montre que $X \in \mathrm{Vect}(U)$ et ainsi

$$\boxed{\mathrm{Ker}(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)}$$

17) Les A^l sont toutes stochastiques (question 12). Comme R_k est l'isobarycentre des matrices $I_n, R, \dots, R^{k-1}$ et que $\mathscr{E}$ est convexe (question 13), on en déduit que

$$\boxed{R_k \text{ est stochastique pour tout } k}$$

18) a) Les questions 10 et 14 montrent que (R_k) est convergente de limite P où P est la matrice de la projection sur $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ et de direction $\mathrm{Im}(A - I_n)$. En particulier, elle est de rang $1 = \dim \mathrm{Ker}(A - I_n)$ (question 15).

b) On sait que pour tout entier k, $R_kU = U$, or

$$||R_kU - PU|| = ||(R_k - P)U|| \leqslant n||R_k - P||.||U|| \to 0$$

où on prend la norme infinie pour $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on utilise que dans ce cas, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors $||AX|| \leqslant n||A||.||X||$. On en déduit donc que $PU = U$ ce qui signifie que P est stochastique.

19) Toutes les colonnes de P sont ainsi multiples de U et il existe λ_i telle que la colonne i s'écrive $\lambda_i U$. En posant $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (matrice ligne) on a alors $P = UL$. Comme toutes les coordonnées de U valent 1, toutes les lignes de P valent L. Comme P est stochastique, L l'est aussi.

$$\boxed{P = UL \text{ avec } L \text{ matrice ligne stochastique}}$$

20) Remarquons que

$$R_kA = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^k A^l = \frac{1}{k}((k+1)R_{k+1} - I_n) = \frac{k+1}{k}R_{k+1} - \frac{1}{k}I_n$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient

$$\boxed{PA = P}$$

On aurait aussi pu dire que $\mathrm{Im}(A - I_n) = \mathrm{Ker}(P)$ *et que donc* $P(A - I_n) = 0$.

P est une matrice dont toutes les lignes sont égale à L. PA est ainsi une matrice dont toutes les lignes sont LA. L'égalité $PA = P$ donne ainsi $LA = L$.

Si Y est une matrice ligne, $YA = A$ s'écrit aussi $A^TY^T = Y^T$ ou encore $(A^T - I_n)Y^T = 0$. Or, avec la question 16, $A - I_n$ est de rang $n - 1$ (par théorème du rang) et il en est de même de $A^T - I_n$. Le noyau de $A^T - I_n$ est ainsi de dimension 1. Il contient la matrice L^T qui est non nulle (car sinon $P = 0$). Ainsi, les matrices ligne Y vérifiant $YA = A$ sont les multiples de L. La somme des coefficients de λL ne valant 1 que si $\lambda = 1$, on a finalement

$$\boxed{L \text{ est la seule ligne stochastique telle que } LA = L}$$

21) On montre par récurrence simple que $LA^k = L$ pour tout k. En particulier, $LA^p = L$. Si, par l'absurde, on avait $\lambda_i = 0$ alors en regardant le i-ème coefficient de $LA^p = L$, on aurait

$$0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j (A^p)_{j,i}$$

Les $(A^p)_{j,i}$ étant > 0 et les λ_j positifs non tous nuls, ceci est impossible. On a montré que

$$\boxed{L \text{ est à coefficients strictement positifs}}$$

22) On sait que $\mathrm{Ker}(A - I_n) \oplus \mathrm{Im}(A - I_n) = \mathbb{R}^n$. Les espaces $F = \mathrm{Ker}(A - I_n)$ et $G = \mathrm{Im}(A - I_n)$ sont stables par l'endomorphisme canoniquement associé à A. En notant $u_F \in \mathscr{L}(F)$ et $u_G \in \mathscr{L}(G)$ les endomorphismes induits, comme $F \oplus G = \mathbb{R}^n$,

$$\chi_u = \chi_{u_F} \chi_{u_G}$$

F est de dimension 1 et $u_F = \mathrm{Id}_F$ donc $\chi_{u_F} = (X - 1)$. Comme $F \cap G = \{0\}$, $u_G - \mathrm{Id}_G$ est inversible et 1 n'est pas racine de χ_{u_G}. De tout cela, on déduit que 1 est racine simple de χ_u, c'est à dire

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre simple de } A}$$

– Partie IV : Application au labyrinthe –

23) On a $P = UL$ où L est l'unique ligne stochastique telle que $LA = L$, c'est à dire où L^T a des coefficients positifs de somme 1 et vérifie $A^T L^T = L^T$, c'est à dire où L^T est vecteur propre de B associé à la valeur propre 1. $(4, 3, 3, 3, 3)$ est un tel vecteur propre et donc $L = \frac{1}{16}(4, 3, 3, 3, 3)$. Finalement,

$$\boxed{P = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}}$$

24) Supposons que S_0 suive une loi convenable. On a alors $S_0 = BS_0$ et, par récurrence, $S_0 = B^k S_0$. En transposant, combinant et passant à la limite, on obtient ${S_0}^T A = {S_0}^T$. Comme ${S_0}^T$ est stochastique, la question 20 montre que ${S_0}^T = L$ trouvé ci-dessus.
La réciproque a été traitée en question 4.

$$\boxed{\text{Le seul cas où les } S_k \text{ ont la même loi est donnée par } \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}}$$