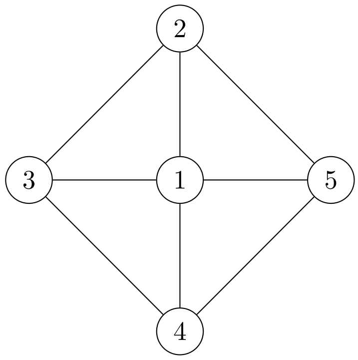
Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 à 5, qui communiquent par des tubes selon le schéma ci-dessous



Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés $0, 1, 2, \dots, k, \dots$ $(k \in \mathbb{N})$. On admet que, si le rat se trouve à l'instant k $(k \in \mathbb{N})$ dans la salle numéro i $(1 \leqslant i \leqslant 5)$, alors il empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle i et se trouvera donc, à l'instant $k+1$, avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle i. On admet que l'on peut introduire, pour tout k entier naturel, une variable aléatoire S_k donnant le numéro de la salle où se trouve le rat à l'instant k. A titre d'exemple, on aura donc

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(S_{k+1} = 1 | S_k = 2) = P(S_{k+1} = 3 | S_k = 2) = P(S_{k+1} = 5 | S_k = 2) = \frac{1}{3}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on introduit la matrice colonne $X_k = \begin{pmatrix} P(S_k = 1) \\ P(S_k = 2) \\ P(S_k = 3) \\ P(S_k = 4) \\ P(S_k = 5) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{5,1}(\mathbb{R})$.

Pour une matrice B, B^T représente sa matrice transposée.

– Partie I : Premiers pas –

1) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $P(S_{k+1} = 1)$ s'écrit comme combinaison linéaire des $P(S_k = i)$ pour $i = 1, \dots, 5$.
2) Expliciter la matrice carrée $B \in \mathscr{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $X_{k+1} = BX_k$ pour tout entier naturel k.
3) En observant les colonnes de la matrice B, montrer que le réel 1 est valeur propre de B^T et expliciter un vecteur propre associé.

   On suppose que la loi de la variable S_0 est donnée par $X_0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}\right)^T$.

4) Montrer qu'alors les variables alétoires S_k ont toutes la même loi.
5) Est-ce que S_0 et S_1 sont indépendantes ?

– Partie II : Convergence dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ –

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|.\|$ sur E telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| \leqslant \|x\|$$

Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k}(I_E + u + u^2 + \dots + u^{k-1})$$

où I_E représente l'endomorphisme identité de E.

6) Soit $x \in \operatorname{Ker}(u - I_E)$. Déterminer $\lim\limits_{k \to +\infty} r_k(x)$.

7) Soit $x \in \mathrm{Im}(u - I_E)$. Montrer que $\lim_{k \to +\infty} r_k(x) = 0_E$.
8) En déduire que $E = \mathrm{Ker}(u - I_E) \oplus \mathrm{Im}(u - I_E)$.
9) Soit x un vecteur quelconque. Montrer que la suite $(r_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un vecteur de E, que l'on notera $p(x)$. Interpréter géométriquement l'application $p\ :\ E \to E$ ainsi définie.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$ sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^n$, telle que, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on ait $\|AX\| \leqslant \|X\|$. Pour tout k entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k}(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \tag{1}$$

où I_n est la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

10) Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P, telle que $P^2 = P$.
On justifiera soigneusement.

– Partie III - Matrice stochastiques –

On fixe dans cette partie un entier $n \geqslant 2$.

On notera $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients valent 1.
Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si elle vérifie les conditions suivantes :
(C1) $\forall (i,j) \in [|1,n|]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0$.
(C2) $\forall i \in [|1,n|],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

Nous dirons aussi qu'une matrice ligne $L = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients λ_i sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.

11) Vérifier que la condition (C2) équivaut à la condition $AU = U$.
12) En déduire que l'ensemble $\mathscr{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable pour le produit matriciel.
13) Montrer que cet ensemble $\mathscr{E}$ est une partie convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit l'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ où les x_i sont les coefficients de X.

14) Montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dans les question 15 à 22, on note $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que A^p ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout k entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l$$

15) Montrer que $\mathrm{Ker}(A^p - I_n)$ est de dimension 1.
Indication : soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \ker(A^p - I_n)$, soit $s \in [|1,n|]$ un indice tel que $x_s = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} x_j$, on montrera que $x_j = x_s$ pour tout j.
16) En déduire que $\mathrm{Ker}(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$.
17) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice R_k est stochastique.
18) a) Montrer que la suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P de rang 1.
    b) Montrer que P est stochastique.
19) En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une matrice ligne stochastique.
20) Montrer que $PA = P$. En déduire que L est la seule matrice ligne stochastique vérifiant $LA = L$.
21) Montrer que les coefficients de la matrice ligne L sont tous strictement positifs.
22) Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de A. *On pourra utiliser la question 8.*

– Partie IV - Application au labyrinthe –

On approfondit l'étude commencée dans la partie I en exploitant les résultats de la partie III.

On pose $A = {}^tB$ où B est la matrice construite dans la partie I.

Un calcul qui n'est pas demandé montre que les coefficients de la matrice A^2 sont tous strictement positifs.

23) Expliciter la limite P de la suite de matrices $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie en (1).
24) Montrer qu'il existe une unique loi de probabilité sur l'ensemble $[|1,5|]$ telle que, si la variable aléatoire S_0 suit cette loi, alors les variables S_k suivent toutes la même loi (autrement dit, telle que la présence du rat dans une salle soit la même à tous les instants).