

Partie I :
Variable aléatoire discrète admettant un moment exponentiel

- 1) Soit $x \in X(\Omega)$, $e^{\alpha x} \leq e^{\alpha|x|}$. Or, comme X admet un moment exponentiel d'ordre α , la famille $(e^{\alpha|x|}P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable et donc la famille $(e^{\alpha x}P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ aussi. De ce fait, d'après le théorème de transfert,

La variable $e^{\alpha X}$ admet une espérance finie

- 2) Pour chacune des variables aléatoires réelles suivantes, déterminer les réels α strictement positifs tels que la variable aléatoire admette un moment exponentiel d'ordre α et calculer $E(e^{\alpha X})$ dans ce cas.

- a) On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On remarque pour commencer que X ne prend que des valeurs positive, on a donc $e^{\alpha X} = e^{\alpha|X|}$.

En travaillant dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ car tous les termes sont positifs, on a d'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned} E(e^{\alpha X}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{\alpha k} P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^{\alpha} \lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{\alpha}} < +\infty \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $\alpha > 0$, la variable X admet un moment exponentielle d'ordre α et que $E(e^{\alpha X}) = \exp(\lambda(e^{\alpha} - 1))$.

- b) On suppose que Y suit la loi géométrique de paramètre p , où p est un réel strictement compris entre 0 et 1. On remarque pour commencer que Y ne prend que des valeurs positive, on a donc $e^{\alpha Y} = e^{\alpha|Y|}$.

En travaillant dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ car tous les termes sont positifs, on a d'après le théorème de transfert et en notant $q = 1 - p$,

$$\begin{aligned} E(e^{\alpha Y}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\alpha k} P(Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\alpha k} p q^{k-1} \\ &= p e^{\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} (q e^{\alpha})^k \end{aligned}$$

On en déduit que la variable aléatoire Y admet un moment exponentielle d'ordre α si et seulement si $q e^{\alpha} < 1$ c'est à dire si et seulement si $\alpha < -\ln q$.

Dans ce cas, $E(e^{\alpha Y}) = \frac{p e^{\alpha}}{1 - q e^{\alpha}}$.

- c) On suppose que Z suit la loi binomiale de paramètre n et p , où n est un entier strictement positif et p est un réel strictement compris entre 0 et 1. Comme $Z(\Omega)$ est fini, la variable $e^{\alpha|Z|}$ est d'espérance finie et donc Z admet un moment exponentiel d'ordre α , pour tout $\alpha > 0$. De plus, en notant $q = 1 - p$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e^{\alpha Z}) &= \sum_{k=0}^n e^{\alpha k} P(Y = k) \\ &= \sum_{k=0}^n e^{\alpha k} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^{\alpha})^k q^{n-k}. \end{aligned}$$

On en déduit, d'après le binôme de Newton, que $\boxed{\mathbf{E}(e^{\alpha Z}) = (pe^{\alpha} + q)^n}$.

Partie II :

Une majoration de $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right)$

- 3) a) Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur \mathbb{R}^+ , et admettant une limite finie en $+\infty$.

Comme f admet une limite finie en $+\infty$, elle est bornée au voisinage de $+\infty$, donc il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que f soit bornée sur $]M, +\infty[$.

Comme f est continue sur le segment (compact) $[0, M]$, elle y est bornée.

Donc $\boxed{f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^+}$ (car toute fonction bornée sur un nombre fini d'ensembles l'est sur leur réunion).

- b) g est continue sur \mathbb{R}^+ et a pour limite zéro à l'infini (limite usuelle). Par la question précédente, $\boxed{g \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^+}$.

On pouvait aussi étudier les variations de g par dérivation (g est positive et maximale en $1/\gamma$ où elle vaut $\frac{1}{\gamma e}$)

- 4) D'après la question précédente, la fonction $t \mapsto te^{-\alpha t}$ est bornée sur \mathbb{R}^+ , donc il existe une constante positive M telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, |te^{-\alpha t}| \leq M$$

On a donc $|X| \leq Me^{\alpha|X|}$.

Or une variable aléatoire majorée en valeur absolue par une variable aléatoire d'espérance finie est d'espérance finie (en calculant a priori dans $[0, +\infty[$) on a par croissance de l'espérance $E(|X_1|) \leq E(Me^{\alpha|X_1|}) < +\infty$, donc $\boxed{X \text{ est d'espérance finie}}$.

- 5) Par la question 3)b), la fonction $t \mapsto te^{-\alpha t/2}$ est bornée sur \mathbb{R}^+ donc majorée en valeur absolue sur cet intervalle par une constante K , et on a donc pour tout t réel, $t^2 = |t|^2 \leq (Ke^{\alpha|t|/2})^2 = K^2e^{\alpha|t|}$. Ainsi $E(X^2) \leq E(K^2e^{\alpha|X|}) < +\infty$. Donc $\boxed{S_n \text{ a un moment d'ordre 2}}$ comme combinaison linéaire de variables aléatoires ayant des moments d'ordre 2.

De plus, les X_i étant mutuellement indépendantes donc deux à deux indépendantes, $V(S_n) = nV(X_1)$. On a donc $V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{nV(X_1)}{n^2} = \frac{V(X_1)}{n}$. De plus, $E(S_n/n) = nE(X_1)/n = m$.

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\boxed{P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(S_n/n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{V(X_1)}{n\varepsilon^2}}$$

- 6) Pour tout $t \in [-\alpha, \alpha]$, on a $0 \leq e^{tX} \leq e^{\alpha|X|}$ donc (en majorant a priori dans $[0, +\infty]$), $E(e^{tX}) \leq E(e^{\alpha|X|}) < +\infty$, et ainsi Ψ est définie en t .

Par transfert, on a pour tout $t \in [-\alpha, \alpha]$,

$$\Psi(t) = \sum_{p \in \mathbb{N}} e^{tx_p} P(X = x_p) = \sum_{p=0}^{\infty} e^{tx_p} P(X = x_p)$$

(sous-entendu : la famille est sommable et la série converge absolument) Pour tout naturel p , notons $g_p : t \mapsto e^{tx_p} P(X = x_p)$. Chacune de ces fonctions est continue sur $[-\alpha, \alpha]$ et $\|g_p\|_{\infty, [-\alpha, \alpha]} = e^{\alpha|x_p|} P(X = x_p)$.

Par le théorème de transfert, comme $e^{\alpha|X|}$ est d'espérance finie, la famille $(\|g_p\|_{\infty, [-\alpha, \alpha]})_{p \in \mathbb{N}}$ est sommable donc la série $\sum_{p \geq 0} \|g_p\|_{\infty, [-\alpha, \alpha]}$ converge absolument donc converge.

Ainsi la série de fonctions $\sum_{p \geq 0} g_p$ converge normalement, donc uniformément sur $[-\alpha, \alpha]$.

Donc Ψ est continue sur $[-\alpha, \alpha]$.

- 7) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction g_p est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\alpha, \alpha[$ avec pour dérivée $g'_p : t \mapsto x_p e^{tx_p} P(X = x_p)$.

Soit $\beta \in [0, \alpha[$. On a

$$\|g'_p\|_{\infty, [-\beta, \beta]} = |x_p| e^{\beta|x_p|} P(X = x_p).$$

Or par la question 3)b), la fonction $x \mapsto x e^{(\beta-\alpha)x}$ est bornée sur \mathbb{R}^+ , donc majorée en valeur absolue par une constante M .

Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\|g'_p\|_{\infty, [-\beta, \beta]} \leq M e^{(\alpha-\beta)|x_p|} e^{\beta|x_p|} P(X = x_p) = M e^{\alpha|x_p|} P(X = x_p)$$

Donc par transfert, $\sum_{p \in \mathbb{N}} \|g'_p\|_{\infty, [-\beta, \beta]} \leq E(M e^{\alpha|X|}) < +\infty$, et ainsi $\sum_{p \geq 0} \|g'_p\|_{\infty, [-\beta, \beta]}$ converge absolument donc converge.

La série des dérivées $\sum_{p \geq 0} g'_p$ converge donc normalement, donc uniformément, sur tout segment de $] -\alpha, \alpha[$ (car tout segment J de cet intervalle est inclus dans un segment de la forme $[-\beta, \beta]$ en posant $\beta = \max_{t \in J} |t| < \alpha$, la fonction continue valeur absolue ayant un maximum sur le segment J).

Ainsi Ψ est de classe \mathcal{C}^1 .

De plus pour tout $t \in] -\alpha, \alpha[$,

$$\Psi'(t) = \sum_{p=0}^{\infty} g'_p(t) = \sum_{p=0}^{\infty} x_p e^{tx_p} P(X = x_p) = E(X e^{tX})$$

(par transfert et sommabilité de la famille $(x_p e^{tx_p} P(X = x_p))_{p \in \mathbb{N}}$)

- 8) $f_\varepsilon(0) = 1.E(1) = 1$

$$f'_\varepsilon(0) = -(m + \varepsilon)E(1) + 1.E(X.1) = -(m + \varepsilon) + m = -\varepsilon.$$

- 9) Par la question précédente, on a $f_\varepsilon(t) = 1 - \varepsilon t + o_{t \rightarrow 0}(t)$.

$f_\varepsilon(t) - 1 \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -\varepsilon t$, donc $f(t) - 1$ est, au sens strict, de même signe que $-\varepsilon t$ pour t suffisamment proche de 0.

De plus f est, pour t suffisamment proche de 0, du signe de sa limite non nulle 1 en 0, ceci au sens strict.

Ainsi il existe $t_0 \in]0, \alpha[$ tel que $0 < f(t_0) < 1$.

10) e^{tS_n} est produit de $e^{tX_1}, \dots, e^{tX_n}$ qui sont mutuellement indépendantes par le lemme des coalitions, et qui sont d'espérances finies.

Ainsi e^{tS_n} est d'espérance finie égale à

$$\boxed{E(e^{tS_n}) = E(e^{tX_1}) \dots E(e^{tX_n}) = (\Psi(t))^n}$$

11) Soit t un réel appartenant à l'intervalle $]0, \alpha]$ et soit n appartenant à \mathbb{N}^* .

Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \frac{S_n(\omega)}{n} \geq m + \varepsilon &\Leftrightarrow tS_n(\omega) \geq t(m + \varepsilon)n \text{ car } t > 0 \text{ et } n > 0 \\ &\Leftrightarrow e^{tS_n(\omega)} \geq e^{t(m+\varepsilon)n} \text{ par croissance des fonctions exponentielle et logarithme} \end{aligned}$$

Ainsi les événements $\left(\frac{S_n}{n} \geq m + \varepsilon\right)$ et $\left(e^{tS_n} \geq (e^{t(m+\varepsilon)})^n\right)$ sont égaux donc ont même probabilité.

Par l'inégalité de Markov et positivité de la variable aléatoire e^{tS_n} , on a

$$P\left(e^{tS_n} \geq (e^{t(m+\varepsilon)})^n\right) \leq \frac{E(e^{tS_n})}{(e^{t(m+\varepsilon)})^n} = \frac{\Psi(t)^n}{(e^{t(m+\varepsilon)})^n} = \boxed{(f_\varepsilon(t))^n}$$

12) Prenant t_0 comme à la question 7) et posant $r = f_\varepsilon(t_0)$, on a $0 < r < 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{P\left(\frac{S_n}{n} \geq m + \varepsilon\right) \leq r^n.}$$

13) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\frac{S_n}{n} \geq m + \varepsilon\right) + P\left(\frac{-S_n}{n} \geq -m + \varepsilon\right)$$

(par union disjointe)

Or, posant pour tout naturel n , $Y_n = -X_n$, la suite (Y_n) vérifie les mêmes hypothèses que la suite (X_n) sauf que leur espérance commune est $-m$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $Y_1 + \dots + Y_n = -S_n$.

Ainsi, par ce qui précède, il existe un réel $s \in]0, 1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\frac{-S_n}{n} \geq -m + \varepsilon\right) \leq s^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2k^n = O(k^n)$$

avec $k = \max(r, s) \in]0, 1[$.

Donc

$$\boxed{P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = O(k^n)}$$

Or $k^n = o\left(\frac{V(X)}{n\varepsilon^2}\right)$ (sauf si $V(X)$ est nul, ce qui revient à dire que chacune des variables aléatoires X_n est presque sûrement constante). La majoration que nous venons d'obtenir est donc asymptotiquement infiniment meilleure (sauf dans le cas trivial) que celle obtenue par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Partie III :
Une majoration de $P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right)$

14) Soit $\alpha > 0$, en travaillant dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ car tous les termes sont positifs, on a d'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(e^{\alpha|X|}) = \sum_{p=0}^{+\infty} e^{\alpha|x_p|} P(X = x_p) \leq e^{\alpha c} \sum_{p=0}^{+\infty} P(X = x_p) = e^{\alpha c} < +\infty$$

On en déduit que la variable aléatoire X admet un moment exponentiel d'ordre α pour tout réel α strictement positif.

15) On considère Y la variable aléatoire réelle définie par $Y = \frac{1}{2} - \frac{X}{2c}$.

a) On fait le calcul

$$-cY + (1 - Y)c = -c\left(\frac{1}{2} - \frac{X}{2c}\right) + c\left(\frac{1}{2} + \frac{X}{2c}\right) = X.$$

b) La fonction $x \mapsto e^x$ est de classe \mathcal{C}^∞ et pour tout réel x sa dérivée seconde est $x \mapsto e^x$ qui est à valeurs positives. On en déduit que $x \mapsto e^x$ est convexe.

c) Soit $\omega \in \Omega$,

$$e^{X(\omega)} = \exp(-cY(\omega) + (1 - Y(\omega))c) \leq Y(\omega)e^{-c} + (1 - Y(\omega))e^c$$

L'inégalité venant de la question précédente et du fait que $Y(\omega) \in [0, 1]$ car $X(\omega) \in [-c, c]$.

En effet pour tout $t \in [0, 1]$, $\exp(t \times (-x) + (1 - t) \times c) \leq te^{-c} + (1 - t)e^c$.

On a bien montré que $e^X \leq Ye^{-c} + (1 - Y)e^c$.

d) Par croissance de l'espérance, puis la linéarité de cette dernière, on obtient que

$$\mathbb{E}(e^X) \leq \mathbb{E}(Ye^{-c} + (1 - Y)e^c) \leq e^{-c}\mathbb{E}(Y) + e^c\mathbb{E}(1 - Y) = e^{-c}\mathbb{E}(Y) + e^c(1 - \mathbb{E}(Y)).$$

Maintenant, toujours par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2c}\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$ car $\mathbb{E}(X) = 0$.

On en déduit bien que $\mathbb{E}(e^X) \leq \text{ch}(c)$.

16) Soit $t \in \mathbb{R}^{+*}$, la variable aléatoire $Z_t = tX$ vérifie que $\mathbb{E}(Z_t) = 0$ et, pour tout $\omega \in \Omega$, $|Z_t(\omega)| \leq ct$. En appliquant ce qui précède, on obtient que $\Psi(t) = \mathbb{E}(e^{Z_t}) \leq \text{ch}(ct)$.

17) a) D'après le cours la fonction ch est développable en série entière sur \mathbb{R} (donc son rayon de convergence vaut $+\infty$) et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}.$$

On sait de même la fonction $t \mapsto e^t$ est développable en série entière sur \mathbb{R} (donc son rayon de convergence vaut $+\infty$) et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}.$$

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

La série ci-dessus a donc encore un rayon de convergence égal à $+\infty$.

b) Montrons, par récurrence sur k que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $u_k \geq v_k$ où $u_k = (2k)!$ et $v_k = 2^k k!$.

— Pour $k = 0$, $u_0 = 1 = v_0$.

— Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_k \leq v_k$, on a alors

$$u_{k+1} = (2k+2)! = (2k+2)(2k+1)u_k \geq (2k+2)u_k \geq 2(k+1)v_k = v_{k+1}.$$

Par récurrence, on obtient que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \geq v_k$. De ce fait, pour tout $t \in \mathbb{R}$, comme $t^{2k} = (t^2)^k \geq 0$, $\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{t^{2k}}{2^k k!}$ et donc, en sommant ces termes,

$$\text{ch}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

c) Soit $t \in \mathbb{R}^{+*}$, on utilise les questions 16 et 17.c et le fait que $m = \mathbf{E}(X) = 0$ pour obtenir,

$$f_\varepsilon(t) = e^{-\varepsilon t} \Psi(t) \leq e^{-\varepsilon t} \text{ch}(ct) \leq e^{-\varepsilon t} \exp\left(\frac{c^2 t^2}{2}\right) = \exp\left(-t\varepsilon + \frac{1}{2}c^2 t^2\right).$$

18) D'après la question 11, on sait que

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq (f_\varepsilon(t))^n \leq \exp\left(-nt\varepsilon + \frac{n}{2}c^2 t^2\right).$$

Cherchons alors la valeur de t qui permet d'avoir l'inégalité optimale. Pour cela on cherche le minimum de la fonction $\theta : t \mapsto -t\varepsilon + \frac{c^2 t^2}{2}$. Elle est dérivable et $\theta' : t \mapsto -\varepsilon + c^2 t$. Son minimum est donc atteint en $\frac{\varepsilon}{c^2}$. En remplaçant, on obtient que

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-n\frac{\varepsilon^2}{c^2} + \frac{nc^2\varepsilon^2}{2c^4}\right) = \exp\left(-n\frac{\varepsilon^2}{2c^2}\right).$$

On peut faire le même raisonnement en remplaçant les variables $Y_k = -X_k$. On obtient que $P\left(-\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-n\frac{\varepsilon^2}{2c^2}\right)$. En utilisant que $\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = \left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \cup \left(-\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right)$, on obtient que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2 \exp\left(-n\frac{\varepsilon^2}{2c^2}\right)$.

19) Soit n un entier naturel non nul, p un élément de l'intervalle $]0, 1[$ et Z une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre (n, p) .

On considère des variables Y_k mutuellement indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$.

On a $\mathbf{E}(Y_k) = p$ et on pose $X_k = Y_k - p$ de telle sorte que $\mathbf{E}(X_k) = 0$. On a de plus $Z - np = \sum_{k=1}^n (Y_k - p) = \sum_{k=1}^n X_k = S_n$. De ce fait, $\frac{Z}{n} - p = \frac{S_n}{n}$.

Les variables X_k sont encore mutuellement indépendantes et $X_k(\Omega) = \{1-p, -p\}$. On pose $c = \max(1-p, p)$. On peut alors utiliser ce qui précède,

$$P\left(\left|\frac{Z}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2 \exp\left(-n\frac{\varepsilon^2}{2c^2}\right).$$