

Exercice I

1. Pour tout $t \geq 0$, on a par l'inégalité arithmético-géométrique : $\frac{1+t^2}{2} \geq \sqrt{1 \cdot t^2} = |t| = t$ et donc

$$0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}.$$

On peut aussi réaliser une étude de fonctions.

Ainsi, par croissance de l'intégrale, on a pour tout naturel n ,

$$0 \leq a_n \leq \int_0^1 \frac{dt}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

Donc pour tout $x \in]-2, 2[: \forall n \in \mathbb{N}, |a_n x^n| = a_n |x|^n \leq \left(\frac{|x|}{2}\right)^n \leq 1$. La suite $(a_n x^n)$ est bornée donc $x \leq R_a$. On en déduit que $R_a \geq 2$

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t_n \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 \left(\frac{t}{1+t^2}\right)^n dt \\ &\geq \int_{t_n}^1 \left(\frac{t}{1+t^2}\right)^n dt \text{ car l'intégrande est positive} \\ &\geq \int_{t_n}^1 \left(\frac{t_n}{2}\right)^n dt = \frac{(1-t_n)t_n^n}{2^n} \end{aligned}$$

par croissance de l'intégrale et car pour tout $t \in [t_n, 1]$,

$$0 \leq t_n \leq t \quad \text{et} \quad 2 \geq 1+t^2 > 0$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $t_n = 1 - \frac{1}{n}$.

On obtient par la question précédente :

$$a_n 2^n \geq \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{n}$$

car $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{1}{n})} = e^{-1+o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1} \neq 0$. (en utilisant la continuité de la fonction exponentielle)

Ainsi $\frac{1}{n} = O(a_n 2^n)$.

Donc la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} a_n 2^n$ diverge, car si elle convergerait, on en déduirait que la série harmonique converge.

c) Comme $\sum_{n \geq 0} a_n 2^n$ diverge, $R_a \leq 2$. En utilisant le résultat de la question 1, $R_a = 2$

3. Soit $x \in]-2, 2[$.

a) On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n : t \mapsto \left(\frac{xt}{1+t^2}\right)^n$. On a alors

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 g_n(t) dt$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, la série numérique $\sum g_n(t)$ est géométrique et le module de sa raison est $\left| \frac{xt}{1+t^2} \right| \leq \frac{|x|}{2} < 1$. Ainsi la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ et sa somme est $g : t \mapsto \frac{1}{1 - \frac{xt}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{1+t^2-xt}$.

De plus les g_n et g sont continues sur $[0, 1]$.

Enfin, la série numérique $\sum \int_0^1 |g_n(t)| dt$ a pour terme général $\int_0^1 \left(\frac{|x|t}{1+t^2} \right)^n dt \leq \left(\frac{|x|}{2} \right)^n$, donc converge.

Par le théorème de Lebesgue d'intégration terme à terme,

$$S(x) = \int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^2-xt} dt = \boxed{1 + x \int_0^1 \frac{t}{1-xt+t^2} dt.}$$

- b) Dans l'intégrale précédente, le dénominateur est un trinôme en t du second degré de discriminant $x^2 - 4 < 0$, donc est strictement positif (car du signe de 1).

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t}{1-xt+t^2} dt &= \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}(2t-x) + \frac{x}{2}}{t^2-xt+1} dt \\ &= \frac{1}{2} [\ln(t^2-xt+1)]_{t=0}^1 + \frac{x}{2} \int_0^1 \frac{1}{(t-\frac{x}{2})^2 + \frac{4-x^2}{4}} dt \\ &= \frac{\ln(2-x)}{2} + \frac{x}{2} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} \left[\arctan \frac{2(t-\frac{x}{2})}{\sqrt{4-x^2}} \right]_{t=0}^1 \\ &= \frac{\ln(2-x)}{2} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \left(\arctan \frac{2-x}{\sqrt{4-x^2}} - \arctan \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \right) \\ &= \frac{\ln(2-x)}{2} + \frac{x}{\sqrt{(2-x)(2+x)}} \left(\arctan \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} - \arctan \frac{-x}{\sqrt{(2-x)(2+x)}} \right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{S(x) = 1 + x \left(\frac{\ln(2-x)}{2} + \frac{x}{\sqrt{(2-x)(2+x)}} \left(\arctan \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} - \arctan \frac{-x}{\sqrt{(2-x)(2+x)}} \right) \right)}$$

4. a) i) Montrons que $|f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Par encadrement, il suffit de prouver que $2^n a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

La suite de fonctions $(h_n : t \mapsto \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^n)$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1[$ car pour tout $t \in [0, 1[$ on a

$$0 \leq \frac{2t}{1+t^2} < 1$$

car $1+t^2-2t = (t-1)^2 > 0$.

De plus, pour tout $t \in [0, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|h_n(t)| = h_n(t) \leq 1^n = 1$.

Enfin, les fonctions h_n , la fonction nulle et la fonction $\varphi : t \mapsto 1$ sont continues sur $[0, 1[$ et φ est intégrable sur $[0, 1[$.

Par le théorème de convergence dominée, on a donc

$$a_n 2^n = \int_{[0,1[} h_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1[} 0 dt = 0$$

ii) Pour tout naturel n , on a

$$|f_n(x)| = \int_0^1 \left(\frac{(-x)t}{1+t^2} \right)^n dt \leq \int_0^1 \left(\frac{(-x)t}{1+t^2} \right)^{n+1} dt = |f_{n+1}(x)|$$

par croissance de l'intégrale et car pour tout $t \in [0, 1]$ on a $0 \leq \frac{(-x)t}{1+t^2} \leq \frac{2t}{1+t^2} \leq 1$ (voir question 1).

iii) Soit $x \in [-2, 0]$.

La série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est alternée car les a_n sont positifs.

Ainsi, en utilisant les résultats des deux questions précédentes, la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées pour tout $x \in [-2, 0]$. Donc S est définie sur $[-2, 0]$.

b) Notant $R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$, en utilisant la majoration du reste d'une série convergente par le théorème des séries alternées :

$$\forall x \in [-2, 0] \forall n \in \mathbb{N} \quad |R_n(x)| \leq |a_{n+1} x^{n+1}| = a_{n+1} |x|^{n+1} \leq a_{n+1} 2^{n+1}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|R_n\|_{\infty, [-2, 0]} \leq a_{n+1} 2^{n+1}$$

Or (cf question 4.a.i), $a_{n+1} 2^{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ donc par encadrement,

$$\|R_n\|_{\infty, [-2, 0]} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur $[-2, 0]$ de la série de fonctions $\sum (x \mapsto a_n x^n)$. Les termes de cette série étant de plus continus sur $[-2, 0]$, S est continue sur $[-2, 0]$.

c) Par la question précédente,

$$S(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} S(x)$$

Or pour $x \in]-2, 2[$, en utilisant la relation donnée par l'énoncé,

$$S(x) = 1 + x \left(\frac{\ln(2-x)}{2} + \frac{x}{\sqrt{(2-x)(2+x)}} \left(-\arctan \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} + \arctan \frac{\sqrt{(2-x)(2+x)}}{-x} \right) \right)$$

Or

$$-\arctan \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} + \arctan \frac{\sqrt{(2-x)(2+x)}}{-x} = -\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} + \frac{\sqrt{(2-x)(2+x)}}{-x} + o_{x \rightarrow (-2)^+}(\sqrt{2+x})$$

Ainsi

$$S(x) = 1 + x \left(\frac{\ln(2-x)}{2} + \frac{x}{\sqrt{(2-x)}} \left(-\sqrt{\frac{1}{2-x}} + \frac{\sqrt{(2-x)}}{-x} + o_{x \rightarrow (-2)^+}(1) \right) \right)$$

D'où

$$\begin{aligned} S(-2) &= 1 - 2 \left(\frac{\ln 4}{2} + \frac{-2}{\sqrt{4}} \left(-\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{4}}{2} \right) \right) \\ &= 1 - 2 \left(\frac{\ln 4}{2} - \frac{1}{2} \right) = \boxed{2 - 2 \ln 2} \end{aligned}$$

N.B. Les 5/2 pouvaient aussi utiliser le théorème sur les limites d'intégrales à paramètre (en vérifiant ses hypothèses) pour passer à la limite dans l'expression intégrale de $S(x)$ établie en 3)a), puis calculer l'intégrale correspondante.

Problème

Partie I : Préliminaires

1. Notons que \mathcal{D} n'est pas vide car, par exemple, $f_0 \in \mathcal{D}$. Soit $f \in \mathcal{D}$ donnée par une série entière de rayon de convergence $R > \alpha$. On sait que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$ donc sur $[-\alpha, \alpha]$.

Soit f_1, f_2 dans \mathcal{D} données par des séries entières de convergence R_1 et R_2 respectivement. On sait que pour λ_1, λ_2 dans \mathbb{C} , la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est définie par une série entière de rayon de convergence $R \geq \min(R_1, R_2) > \alpha$. La fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ appartient donc à \mathcal{D} .

Notons que \mathcal{P} n'est pas vide car, par exemple, $f_0 \in \mathcal{P}$. Les éléments de \mathcal{P} sont des éléments de \mathcal{D} , en effet pour $f : x \mapsto \sum_{n=0}^d a_n x^n$, en posant pour tout entier $n > d$, $a_n = 0$, la fonction f est de

la forme $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. De plus le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est égal à $+\infty$; il est donc supérieur à α .

Soit f_1, f_2 deux fonctions polynomiales et λ_1, λ_2 deux scalaires. La fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est encore polynomiale donc \mathcal{P} est un sous-espace vectoriel de \mathcal{D} .

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in I : u(f_n)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x^n \sin^n(t) dt = \frac{2W_n}{\pi} x^n$. Cela signifie que $u(f_n) = \frac{2W_n}{\pi} f_n$.

De même, $v(f_0)(x) = 1$ et pour $n \geq 1$

$$w(f_n)(x) = f_n(0) + x \int_0^{\pi/2} n x^{n-1} \sin^{n-1}(t) dt = n W_{n-1} x^n.$$

Cela signifie que $v(f_n) = \begin{cases} f_0 & \text{si } n = 0 \\ n W_{n-1} f_n & \text{sinon} \end{cases}$.

3. Soit $f \in \mathcal{P}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_0, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$ tels $f = \sum_{n=0}^N \lambda_n f_n$.

D'après la question ci-dessus,

$$u(f) = \sum_{n=0}^N \frac{2W_n \lambda_n}{\pi} f_n \in \mathcal{P} \quad \text{et} \quad v(f) = \lambda_0 f_0 + \sum_{n=1}^N n W_{n-1} \lambda_n f_n \in \mathcal{P}$$

Cela implique que \mathcal{P} est stable par u et v .

4. Soit $f \in \mathcal{D}$.

a) Soit $x \in I$,

$$u(f)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sin^n t \right) dt$$

Posons, pour tout entier n , $g : t \mapsto a_n x^n \sin^n t$ définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Appliquons le théorème d'interversion série-intégrale version convergence uniforme des séries de fonctions (on peut aussi appliquer le théorème de Lebesgue).

— Les fonctions g_n sont continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

— Pour tout entier n , la fonction $t \mapsto |g_n(t)| = |a_n x^n| \sin^n t$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ d'où $\|g_n\|_\infty = |a_n x^n|$. Or la série $\sum_{n \geq 0} |a_n x^n|$ converge car $x \leq \alpha < R$. La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} g_n$

converge donc normalement donc uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On en déduit que $u(f)(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\pi/2} \sin^n t dt \right) a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ où $\boxed{b_n = \frac{2a_n W_n}{\pi}}$

Pour $x \in I$, la fonction est de classe \mathcal{C}^1 (car de classe \mathcal{C}^∞ d'après 1.) sur I donc sur $[-|x|, |x|]$. Comme $t \mapsto x \sin t$ est continue de $[0, \frac{\pi}{2}]$ et à valeurs dans $[-|x|, |x|]$, $t \mapsto f(x \sin t)$ et $t \mapsto f'(x \sin t)$ sont des fonctions continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On en déduit que $u(f)$ est définie sur I .

Le calcul ci-dessus peut aussi s'écrire pour $x \in]-R, R[$. La série entière $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ a donc un rayon de convergence au moins égal à R et donc il est strictement supérieur à α . On a donc $u(f) \in \mathcal{D}$.

- b) On procède de même pour $v(f)$. On pose cette fois, pour $n \geq 1$, $h_n : t \mapsto n a_n x^n \sin^{n-1} t$, on a alors $\|h_n\| = n |a_n x^n|$ et pour tout $x < R$ la série $\sum_{n \geq 0} n |a_n x^n|$ converge car la série $\sum_{n \geq 0} n a_n x^n$ a aussi R pour rayon de convergence. On en déduit que pour $x \in I$

$$v(f)(x) = a_0 + \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \sin^{n-1} t \right) dt = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t dt \right) a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$\text{où } c_n = \begin{cases} a_0 & \text{si } n = 0 \\ n W_{n-1} a_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme ci-dessus, $v(f) \in \mathcal{D}$.

- Le fait que u et v soient linéaires découle de la linéarité de l'intégrale et de la dérivation.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on procède à une intégration par parties :

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin t \times \sin^{n+1} t dt = [-\cos t \times \sin^{n+1} t]_0^{\pi/2} - (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \times \sin^n t dt.$$

Le crochet étant nul,

$$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t - 1) \times \sin^n t dt = (n+1)(W_{n+2} - W_n).$$

Finalement $\boxed{(n+1)W_n = (n+2)W_{n+2}}$.

Si on pose alors pour tout entier n , $w_n = (n+1)W_n W_{n+1}$, en utilisant ce qui précède,

$$w_n = (n+1)W_n W_{n+1} = (n+2)W_{n+2} W_{n+1} = w_{n+2}.$$

La suite (w_n) est constante. De ce fait, pour tout entier n ,

$$w_n = W_0 \times W_1 = \left(\int_0^{\pi/2} \sin^0 t dt \right) \times \left(\int_0^{\pi/2} \sin^1 t dt \right) = \frac{\pi}{2}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}}$

- Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \times (1 - \sin t) dt$$

Or $t \mapsto \sin^n t \times (1 - \sin t)$ est une fonction négative sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ qui n'est pas identiquement nulle. Comme elle est de plus continue, $W_{n+1} - W_n > 0$ ce qui implique que $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

En remarquant que W_n ne s'annule pas, la stricte décroissance permet d'écrire que pour $n \geq 0$,

$$1 = \frac{W_n}{W_n} > \frac{W_{n+1}}{W_n} > \frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, le terme de droite tend vers 1. De ce fait, $\frac{W_{n+1}}{W_n}$ tend vers 1 par encadrement ce qui signifie que $W_{n+1} \sim W_n$. En utilisant alors la formule démontrée à la question 5.

$$W_n^2 \sim W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

Cela implique $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

En particulier la suite (W_n) tend vers 0.

Partie II : Les fonctions u et v sont-elles lipschitziennes ?

8. Soit $f \in \mathcal{D}$. Pour tout $x \in I$,

$$|u(f)(x)| = \left| \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x \sin t) dt \right| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |f(x \sin t)| dt \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \|f\|_\infty dt \leq \|f\|_\infty.$$

Cela implique que $\|u(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et donc que u est lipschitziennes de $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_\infty)$ dans lui-même.

9. On a vu que pour tout entier n non nul, $v(f_n) = nW_{n-1}f_n$. Cela implique que $\|v(f_n)\|_\infty = nW_{n-1}\|f_n\|_\infty$. Or

$$nW_{n-1} \sim (n-1)\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \sim \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$$

Cela implique que le rapport $\frac{\|v(f_n)\|_\infty}{\|f_n\|_\infty}$ tend vers $+\infty$.

La fonction v n'est pas lipschitziennes de $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_\infty)$ dans lui-même.

10. a) Vérifions les axiomes classiques

- N est positive ($N(f) \geq 0$ comme somme de quantités positives).
- N vérifie l'axiome de séparation (si $N(f) = 0$ alors $\|f\|_\infty = 0$ et donc $f = 0$ car $\|\cdot\|_\infty$ est une norme).
- N est homogène car $\|\cdot\|_\infty$ l'est et car la dérivation est linéaire.
- N vérifie l'inégalité triangulaire car c'est le cas pour $\|\cdot\|_\infty$ et car la dérivation est linéaire.

b) Soit $f \in \mathcal{D}$. Soit $x \in I$,

$$|v(f)(x)| = \left| f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) dt \right| \leq |f(0)| + \alpha \int_0^{\pi/2} |f'(x \sin t)| dt \leq \|f\|_\infty + \alpha \int_0^{\pi/2} \|f'\|_\infty dt$$

On en déduit que

$$|v(f)(x)| \leq \|f\|_\infty + \frac{\alpha\pi}{2} \|f'\|_\infty \leq KN(f)$$

où $K = \max\left(1, \frac{\alpha\pi}{2}\right)$.

Cela montre que v est lipschitziennes de (\mathcal{D}, N) dans $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_\infty)$.

c) Si les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ étaient équivalentes, le fait que v de (\mathcal{D}, N) dans $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_\infty)$ soit lipschitziennes serait équivalent au fait que v de $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_\infty)$ le soit. Ce n'est pas le cas donc N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur \mathcal{D} .

Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Partie III : Étude de la bijectivité de u et v

11. En utilisant les formules démontrées à la question 2, on obtient

$$u(v(f_0)) = u(f_0) = \frac{2}{\pi} W_0 f_0 = f_0 \quad \text{et} \quad v(f_0) = v(f_0) = f_0$$

car $W_0 = \frac{\pi}{2}$.

De même, si $n \geq 1$,

$$u(v(f_n)) = u(nW_{n-1}f_n) = \frac{2nW_{n-1}W_n}{\pi} f_n = f_n$$

en utilisant le résultat de la question 5. On trouve aussi de la même façon,

$$v(u(f_n)) = v\left(\frac{2W_n}{\pi} f_n\right) = \frac{2nW_{n-1}W_n}{\pi} f_n = f_n.$$

12. Soit $f \in \mathcal{D}$. Notons $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ la série entière (de rayon de convergence $R > \alpha$) qui définit f . En

reprenant les calculs de la question 4, $u(f)$ est définie par la série entière $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ où $b_n = \frac{2a_n W_n}{\pi}$

et $v(f)$ est définie par la série entière $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ où $c_n = \begin{cases} a_0 & \text{si } n = 0 \\ nW_{n-1}a_n & \text{sinon.} \end{cases}$

Pour calculer la série entière qui définit $u(v(f))$ on est donc ramené aux mêmes calculs qu'à la question précédente d'où $\boxed{u(v(f)) = f}$.

13. De même, $\boxed{v(u(f)) = f}$.

On a donc montré que $u \circ v = \text{id}_{\mathcal{D}}$ et $v \circ u = \text{id}_{\mathcal{D}}$ ce qui signifie que u et v sont bijectives et inverses l'une de l'autre.

14. Soit $\alpha < 1$.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. D'après le cours, la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$. Comme $\alpha < 1$, $\arctan' \in \mathcal{D}$.

Soit $x \in I$,

$$u(g)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+x^2 \sin^2 t}.$$

On pose $z = \tan t \iff t = \arctan z$ où $z \mapsto \arctan z$ est une bijection de classe \mathcal{C}^1 strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

On remarque que $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{1}{1+z^2} = \frac{z^2}{1+z^2}$ d'où

$$u(g)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2) \left(1 + \frac{x^2 z^2}{1+z^2}\right)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{1+(1+x^2)z^2}$$

On pose alors le changement de variables affine $\theta = \sqrt{1+x^2}z$ et on obtient

$$u(g)(x) = \frac{2}{\pi \sqrt{1+x^2}} \int_0^{+\infty} \frac{d\theta}{1+\theta^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

b) Soit $f \in \mathcal{D}$ et $x \in I$,

$$v(f)(x) = f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t) dt = f(0) + \frac{\pi}{2} x u(f')(x).$$

c) D'après le cours, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2}$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ donc $h \in \mathcal{D}$ car $\alpha < 1$.

En appliquant le résultat de la question précédente, et le fait que comme $u(g) = h$ alors $v(h) = g$, pour tout $x \in I$,

$$u(h')(x) = \frac{2}{\pi x} (v(h)(x) - h(0)) = \frac{2}{\pi x} (g(x) - h(0)) = \frac{2}{\pi x} \left(\frac{1}{1+x^2} - 1 \right)$$

On obtient donc
$$u(h')(x) = \frac{-2x}{\pi(1+x^2)}$$

Partie IV : Étude des valeurs propres de u et v

15. Comme u et v sont bijectives, 0 n'est valeur propre ni de u ni de v .

16. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On suppose que λ est une valeur propre de v et on note $f \in \mathcal{D}$, un vecteur propre non nul associé. Alors $v(f) = \lambda f$ et donc $u(v(f)) = \lambda u(f)$. En utilisant $u \circ v = \text{id}_{\mathcal{D}}$ et en divisant par λ (non nul d'après la question précédente) on obtient que $u(f) = \frac{1}{\lambda} f$. Cela implique que $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u .

En utilisant cette fois que $v \circ u = \text{id}_{\mathcal{D}}$ on obtient de même que si $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u alors λ est une valeur propre de v .

On en déduit que λ est une valeur propre de v si et seulement si $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u . De plus dans ce cas, $E_{\lambda}(v) = E_{\frac{1}{\lambda}}(u)$ où $E_{\lambda}(v)$ et $E_{\frac{1}{\lambda}}(u)$ désignent les espaces propres de v (resp. de u) associés à la valeur propre λ (resp. $\frac{1}{\lambda}$).

17. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u et $f \in \mathcal{D}$ un vecteur propre (donc non nul) associé. Notons $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ la série entière définissant f . On a vu à la question 4 que $u(f)$ était la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ où, pour tout entier n , $b_n = \frac{2a_n W_n}{\pi}$. Par unicité du développement en série entière, on déduit de la relation $u(f) = \lambda f$ que pour tout entier n ,

$$\frac{2a_n W_n}{\pi} = \lambda a_n.$$

En particulier, s'il existe n, m distincts tels que $a_n \neq 0$ et $a_m \neq 0$, $\lambda = \frac{2W_n}{\pi}$ et $\lambda = \frac{2W_m}{\pi}$ ce qui est absurde car (W_n) étant strictement décroissante $W_n \neq W_m$.

Cela signifie que f est nécessairement une fonction de la forme f_n où $n \in \mathbb{N}$.

Finalement, l'ensemble des valeurs propres de u est l'ensemble $\left\{ \frac{2W_n}{\pi}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

De plus, pour $\lambda = \frac{2W_n}{\pi}$, $E_{\lambda}(u) = \text{Vect}(f_n)$.

En utilisant la question 15, on obtient que l'ensemble des valeurs propres de v est l'ensemble $\left\{ \frac{\pi}{2W_n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ et que si $\lambda = \frac{\pi}{2W_n}$, $E_{\lambda}(v) = \text{Vect}(f_n)$.

18. L'espace vectoriel \mathcal{D} n'admet pas une base de vecteurs propres de u . En effet la famille des vecteurs propres de u est la familles des fonctions f_n et $\text{Vect}(f_0, f_1, f_2, \dots) = \mathcal{P}$ et \mathcal{P} est strictement inclus dans \mathcal{D} . En effet, la restriction de $x \mapsto \exp(x)$ à I appartient à \mathcal{D} et pas à \mathcal{P} . Il en est de même pour v .