

*L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve*

*L'exercice et le problème sont indépendants*

*Ce sujet comporte 3 pages*

### Exercice I

Soit  $n$  un entier naturel. On pose  $a_n = \int_0^1 \left( \frac{t}{t^2 + 1} \right)^n dt$ .

On note  $R_a$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  et  $S$  la fonction  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

1. Soit  $h : t \mapsto \frac{t}{t^2 + 1}$ . Montrer que  $\forall t \in [0, 1], h(t) \leq \frac{1}{2}$ .

En déduire que  $R_a \geq 2$ .

2. a) Soit  $t_n \in [0, 1]$ . Montrer que  $a_n \geq \frac{(1 - t_n)t_n^n}{2^n}$ .

b) En choisissant judicieusement  $t_n$  (en fonction de  $n$ ), montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} 2^n a_n$  diverge.

c) En déduire la valeur de  $R_a$ .

3. Soit  $x \in ] - 2, 2[$ .

a) Montrer que  $S(x) = 1 + x \int_0^1 \frac{t}{1 - xt + t^2} dt$ .

b) Exprimer  $S$  sur  $] - 2, 2[$  à l'aide des fonctions usuelles.

4. On pose  $f_n : x \mapsto a_n x^n$ .

a) Soit  $x \in [-2, 0]$ .

i) Montrer que la suite  $(|f_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

ii) Montrer que la suite  $(|f_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

iii) En déduire que  $S$  est définie en  $x$ .

b) En déduire que  $S$  est continue sur  $[-2, 0]$ .

*On pourra majorer intelligemment  $|R_n(x)|$  où  $R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ .*

c) Déterminer  $S(-2)$ .

*On pourra utiliser que pour  $X \in \mathbb{R}^*$ ,  $\arctan(X) + \arctan\left(\frac{1}{X}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$*

## Problème

Soit  $I$  un intervalle de la forme  $[-\alpha, \alpha]$  où  $\alpha$  est un réel strictement positif. Dans tout le problème, on considère les ensembles suivants :

- $\mathcal{D}$  l'ensemble des fonctions  $f$  de la forme

$$\begin{aligned} f : [-\alpha, \alpha] &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

où la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  a un rayon de convergence  $R_a$  **strictement supérieur** à  $\alpha$ .

- $\mathcal{P}$  l'ensemble des fonctions polynomiales sur  $I$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on note

$$f_n : x \mapsto x^n$$

définie sur  $[-\alpha, \alpha]$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n dt$$

et si  $f \in \mathcal{D}$ , on note  $u(f)$  et  $v(f)$  les applications de  $I$  dans  $\mathbb{C}$  définies par les formules

$$\forall x \in I, u(f)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x \sin(t)) dt$$

$$\forall x \in I, v(f)(x) = f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin(t)) dt$$

*On notera que les notations  $u(f(x))$  et  $v(f(x))$  n'ont AUCUN sens et seront de ce fait sanctionnées*

### Partie I : Préliminaires

1. Justifier que  $\mathcal{D}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$  et que  $\mathcal{P}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $u(f_n)$  et  $v(f_n)$ . On les exprimera en fonction des  $W_k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .
3. En déduire que  $\mathcal{P}$  est stable par  $u$  et  $v$ .
4. Soit  $f \in \mathcal{D}$  et  $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\forall x \in I, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  où la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  a un rayon de convergence  $R_a > \alpha$ .

a) Déterminer une suite  $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\forall x \in ]-R_a, R_a[, \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x \sin(t)) dt = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ .

En déduire que  $u(f)$  est bien définie et appartient à  $\mathcal{D}$ .

b) En procédant de même montrer que  $v(f)$  est bien définie et appartient à  $\mathcal{D}$

5. Montrer que  $u$  et  $v$  sont des endomorphismes de  $\mathcal{D}$ .
6. Etablir pour  $n \in \mathbb{N}$  une relation simple entre  $W_{n+2}$  et  $W_n$ . En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

7. Montrer que la suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante. Déterminer sa limite et donner un équivalent de cette suite.

## Partie II : Les fonctions $u$ et $v$ sont-elles lipschitziennes ?

On considère la norme  $\|\cdot\|_\infty$  de  $\mathcal{D}$  définie pour tout  $f \in \mathcal{D}$  par la formule

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

8. Montrer que  $u$  est une application lipschitzienne de l'espace vectoriel normé  $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_\infty)$  dans lui-même.
9. L'application  $v$  est-elle lipschitzienne de  $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_\infty)$  dans lui-même ?
10. a) Vérifier que l'application  $N : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$  est une norme sur  $\mathcal{D}$ .  
b) Montrer que  $v$  est lipschitzienne de  $(\mathcal{D}, N)$  dans  $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_\infty)$ .  
c) Les normes  $N$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont-elles équivalentes ?

## Partie III : Étude de la bijectivité de $u$ et $v$

11. Déterminer les restrictions de  $u \circ v$  et  $v \circ u$  à  $\mathcal{P}$ .
12. Déterminer  $(u \circ v)(f)$  pour tout  $f \in \mathcal{D}$ .
13. Déterminer également  $(v \circ u)(f)$  pour tout  $f \in \mathcal{D}$ . Conclure.
14. Soit  $\alpha < 1$ .
  - a) Montrer que la restriction  $g$  à  $I$  de  $\arctan'$  appartient à  $\mathcal{D}$ . Calculer  $u(g)$  à l'aide du changement de variable  $z = \tan(t)$ . *On pourra commencer par exprimer  $\sin^2 t$  en fonction de  $z$ .*
  - b) Pour tout  $f \in \mathcal{D}$ , donner une relation liant  $v(f)$  et  $u(f')$ .
  - c) Soit  $h$  la restriction à  $I$  de  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ . Montrer que  $h \in \mathcal{D}$  et en déduire  $u(h')$ .

## Partie IV : Étude des valeurs propres de $u$ et $v$

15. Justifier que 0 n'est valeur propre ni de  $u$  ni de  $v$ .
16. Soit  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Montrer que  $\lambda$  est une valeur propre de  $v$  si et seulement si  $\frac{1}{\lambda}$  est une valeur propre de  $u$ . Qu'en est-il des vecteurs propres correspondants ?
17. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $u$  et  $v$ .
18. L'espace vectoriel  $\mathcal{D}$  admet-il une base de vecteurs propres de  $u$  ? De  $v$  ?