Théorème : Lemme des coalitions

Soit $(X_1,\dots,X_n)$ des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes. Soit $k\in[\![\,1\,;\,n-1\,]\!]$ et

$$f:\prod_{i=1}^{k}X_i(\Omega)\to E\qquad;\qquad g:\prod_{i=k+1}^{n}X_i(\Omega)\to F$$

Les variables $f(X_1,\dots,X_k)$ et $g(X_{k+1},\dots,X_n)$ sont des variables aléatoires discrètes indépendantes.

Démonstration : (Non exigible) : La preuve se déroule en deux temps. On montre d'abord que les deux vecteurs aléatoires $Y=(X_1,\dots,X_k)$ et $Z=(X_{k+1},\dots,X_n)$ sont indépendants. On montre ensuite que si T_1 et T_2 sont deux variables aléatoires indépendantes et que si h_1 et h_2 sont des fonctions où h_i est définie sur $T_i(\Omega)$ alors $h_1(T_1)$ et $h_2(T_2)$ sont indépendantes.

— Première étape : Soit $(x_1,\dots,x_k)\in\prod\limits_{i=1}^{k}X_i(\Omega)$ et $(x_{k+1},\dots,x_n)\in\prod\limits_{i=k+1}^{n}X_i(\Omega)$,

$$\big(Y=(x_1,\dots,x_k)\big)=\bigcap_{i=1}^{k}(X_i=x_i)\text{ et }\big(Z=(x_{k+1},\dots,x_n)\big)=\bigcap_{i=k+1}^{n}(X_i=x_i).$$

On en déduit, d'après l'indépendance des variables X_i que

$$P\Big(\big(Y=(x_1,\dots,x_k)\big)\cap\big(Z=(x_{k+1},\dots,x_n)\big)\Big)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i=x_i)\right)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)$$

De même

$$P\big(Y=(x_1,\dots,x_k)\big)\times P\big(Z=(x_{k+1},\dots,x_n)\big)=\prod_{i=1}^{k}P(X_i=x_i)\times\prod_{i=k+1}^{n}P(X_i=x_i)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i).$$

On a bien montré que Y et Z étaient indépendantes.

— Seconde étape : Soit T_1 et T_2 deux variables aléatoires indépendantes et $h_1:T_1(\Omega)\to E_1$ et $h_2=T_2(\Omega)\to E_2$ des fonctions. Soit $y_1\in E_1$ et $y_2\in E_2$, on sait que

$$\big(h_1(T_1)=y_1\big)=\bigcup_{\substack{x_1\in T_1(\Omega)\\ h_1(x_1)=y_1}}(T_1=x_1)\qquad\text{et}\qquad\big(h_2(T_2)=y_2\big)=\bigcup_{\substack{x_2\in T_2(\Omega)\\ h_2(x_2)=y_2}}(T_2=x_2).$$

De ce fait, par distributivité,

$$\big(h_1(T_1)=y_1\big)\cap\big(h_2(T_2)=y_2\big)=\bigcup_{\substack{(x_1,x_2)\in T_1(\Omega)\times T_2(\Omega)\\ h_1(x_1)=y_1,h_2(x_2)=y_2}}(T_1=x_1)\cap(T_2=x_2)$$

Les événements dans cette union étant deux à deux disjoints et les variables T_i étant supposées indépendantes, on obtient que

$$P\Big(\big(h_1(T_1)=y_1\big)\cap\big(h_2(T_2)=y_2\big)\Big)=\sum_{\substack{(x_1,x_2)\in T_1(\Omega)\times T_2(\Omega)\\ h_1(x_1)=y_1,h_2(x_2)=y_2}}P(T_1=x_1)\times P(T_2=x_2)$$

Or, en procédant de même,

$$P\big(h_1(T_1)=y_1\big)=\sum_{\substack{x_1\in T_1(\Omega)\\ h_1(x_1)=y_1}}P(T_1=x_1)\qquad\text{et}\qquad P\big(h_2(T_2)=y_2\big)=\sum_{\substack{x_2\in T_2(\Omega)\\ h_2(x_2)=y_2}}P(T_2=x_2).$$

On obtient bien que

$$P\Big(\big(h_1(T_1)=y_1\big)\cap\big(h_2(T_2)=y_2\big)\Big)=P\big(h_1(T_1)=y_1\big)\times P\big(h_2(T_2)=y_2\big)$$

Les variables $h_1(T_1)$ et $h_2(T_2)$ sont bien indépendantes.

□