

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont réelles discrètes et définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . Pour toute variable aléatoire X d'espérance finie, on note $\mathbf{E}(X)$ l'espérance de X .

Soit α un réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire réelle discrète X admet un moment exponentiel d'ordre α si la variable aléatoire $e^{\alpha|X|}$ est d'espérance finie.

On pourra utiliser les deux propriétés suivantes sans avoir besoin de les démontrer. Soit n un entier strictement positif et soit X_1, \dots, X_n , n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes. Alors :

- si f est une application définie sur \mathbb{R} à valeurs réelles, alors $f(X_1), \dots, f(X_n)$ sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes ;
- si les n variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont d'espérance finie, alors la variable aléatoire $\prod_{i=1}^n X_i$ est d'espérance finie et $\mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i)$.

Partie I :

Variable aléatoire discrète admettant un moment exponentiel

- 1) Soit α un réel strictement positif et X une variable aléatoire discrète admettant un moment exponentiel d'ordre α . Montrer que la variable aléatoire $e^{\alpha X}$ admet une espérance finie.
- 2) Pour chacune des variables aléatoires réelles suivantes, déterminer les réels α strictement positifs tels que la variable aléatoire admette un moment exponentiel d'ordre α et calculer $\mathbf{E}(e^{\alpha X})$ dans ce cas.
 - a) X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ , où λ est un réel strictement positif.
 - b) Y une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p , où p est un réel strictement compris entre 0 et 1.
 - c) Z une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p , où n est un entier strictement positif et p est un réel strictement compris entre 0 et 1.

Dans les deux dernières parties on considère ε un réel strictement positif, X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\{x_p, p \in \mathbb{N}\}$ où les x_p sont deux à deux distincts, et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que X .

Pour tout entier n strictement positif, on définit la variable aléatoire S_n par $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Partie II : Une majoration de $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right)$

Dans cette partie II, on suppose que la variable aléatoire X admet un moment exponentiel d'ordre α où α est un réel strictement positif.

- 3) a) Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur \mathbb{R}^+ , et admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur \mathbb{R}^+ .
- b) Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R}^+ par $\forall t \in \mathbb{R}^+, g(t) = te^{-\gamma t}$ où γ est un réel strictement positif, est bornée sur \mathbb{R}^+ .
- 4) Montrer que la variable X admet une espérance finie. On notera m l'espérance de X .
- 5) Majorer $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right)$ à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- 6) Montrer que la fonction $\Psi : t \mapsto \mathbb{E}(e^{tX})$ est définie et continue sur le segment $[-\alpha, \alpha]$. On pourra utiliser la série de fonctions $\sum_{p \geq 0} g_p$ où $g_p : t \mapsto e^{tx_p} P(X = x_p)$.
- 7) Montrer que la fonction Ψ est dérivable sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$ et déterminer sa fonction dérivée.

On considère l'application f_ε définie par

$$\begin{array}{ccc} f_\varepsilon & [-\alpha, \alpha] & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ & t & \mapsto e^{-(m+\varepsilon)t} \Psi(t) \end{array}$$

- 8) Donner les valeurs de $f_\varepsilon(0)$ et $f'_\varepsilon(0)$.
- 9) En déduire qu'il existe un réel t_0 appartenant à l'intervalle $]0, \alpha[$ vérifiant $0 < f_\varepsilon(t_0) < 1$.
- 10) Montrer que pour tout réel t appartenant au segment $[-\alpha, \alpha]$ et tout n appartenant à \mathbb{N}^* , la variable aléatoire réelle e^{tS_n} admet une espérance égale à $(\Psi(t))^n$.
- 11) Soit t un réel appartenant à l'intervalle $]0, \alpha]$ et soit n appartenant à \mathbb{N}^* .
Montrer que $P\left(\frac{S_n}{n} \geq m + \varepsilon\right) = P\left(e^{tS_n} \geq (e^{t(m+\varepsilon)})^n\right)$, puis que
$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq m + \varepsilon\right) \leq (f_\varepsilon(t))^n.$$
- 12) En déduire qu'il existe un réel r appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*,$
$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq m + \varepsilon\right) \leq r^n.$$
- 13) Montrer $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = O(k^n)$ où $k \in [0, 1[$. Comparer au résultat de la question 5.

Partie III :
Une majoration de $P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right)$

Dans cette partie, on suppose qu'il existe un réel c strictement positif tel que la variable aléatoire réelle discrète X vérifie $\mathbf{E}(X) = 0$ et $\forall \omega \in \Omega, |X(\omega)| \leq c$.

- 14) Montrer que la variable aléatoire X admet un moment exponentiel d'ordre α pour tout réel α strictement positif.

Les fonctions Ψ et f_ε de la partie II sont ainsi définies sur \mathbb{R} .

- 15) On considère Y la variable aléatoire réelle définie par $Y = \frac{1}{2} - \frac{X}{2c}$.

- a) Vérifier que $X = -cY + (1 - Y)c$.
- b) Montrer que la fonction $x \mapsto e^x$ est convexe sur \mathbb{R} .
- c) En déduire que $e^X \leq Y e^{-c} + (1 - Y)e^c$.
- d) Montrer que $\mathbf{E}(e^X) \leq \text{ch}(c)$.

- 16) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \Psi(t) \leq \text{ch}(ct)$.

- 17) a) Donner le développement en série entière de la fonction cosinus hyperbolique et celui de la fonction définie sur \mathbb{R} par $t \mapsto \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$. On donnera le rayon de convergence de ces deux séries entières.

- b) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}, \text{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

- c) Montrer alors que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, f_\varepsilon(t) \leq \exp\left(-t\varepsilon + \frac{1}{2}c^2t^2\right)$.

- 18) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2 \exp\left(-n\frac{\varepsilon^2}{2c^2}\right)$.

- 19) Soit n un entier naturel non nul, p un élément de l'intervalle $]0, 1[$ et Z une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre (n, p) .

À l'aide de la question précédente, majorer $P\left(\left|\frac{Z}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right)$ en fonction de n, p et ε .