1) a) Le polynôme caractéristique χ_A de A annule A (c'est le théorème de Cayley-Hamilton). Ainsi pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A) = R(A)$ où R est le reste de la division euclidienne de P par χ_A. Ainsi $\mathbb{K}[A] \subset \mathsf{Vect}(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$. L'inclusion réciproque est évidente.

Donc $\boxed{\mathbb{K}[A]X = \mathsf{Vect}(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})X = \mathsf{Vect}(X, AX, A^2X, \ldots, A^{n-1}X)}$.

b) Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ où $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$.

Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors $(X, AX, \ldots, A^{n-1}X)$ est la <u>base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$</u>, donc X est une colonne A-génératrice. Ainsi $\boxed{A \text{ est cyclique}}$.

2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

La famille $(X, AX, \ldots, A^{n-1}X)$ est une famille de n vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, qui est de dimension n. Cette famille est donc génératrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ si et seulement si c'en est une base, c'est-à-dire si et seulement si $\varphi_X(A) \neq 0$.

On a donc d'après 1)a) :

$\boxed{X \text{ est une colonne } A\text{-génératrice si et seulement si } \varphi_X(A) \neq 0}$.

3) a) Soit A un élément de $\mathscr{C}$ et X une colonne A-génératrice.

La fonction φ_X est continue car polynômiale en les coefficients de sa variable A. On peut aussi dire que φ_X est continue par continuité du produit matriciel et du déterminant.

D'après la question précédente, $\mathscr{C}$ contient $\varphi_X^{-1}(\mathbb{K}^*)$, qui est un ouvert comme image réciproque de $\mathbb{K}^*$, qui est un ouvert de $\mathbb{K}$, par l'application continue φ_X. De plus cet ouvert contient A car $\varphi_X(A) \neq 0$.

Donc $\boxed{\mathscr{C} \text{ est un voisinage de } A}$.

b) $\mathscr{C}$ est donc voisinage de tous ses points, donc est $\boxed{\text{ouvert}}$.

4) a) Comme les coefficients de M_λ sont polynomiaux en λ, θ_X est polynomiale.

De plus, $\theta_X(0) = \varphi_X(A) \neq 0$, donc θ_X n'est pas la fonction nulle.

Donc θ_X a un nombre fini de zéros. Ainsi :

$\boxed{M_\lambda \text{ appartient à } \mathscr{C} \text{ pour tout } \lambda \text{ dans } \mathbb{K} \text{ privé d'un ensemble fini}}$.

b) Considérons la suite $(M_{1-\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$. Comme les $1 - \frac{1}{n}$ sont deux à deux distincts, $M_{1-\frac{1}{n}}$ appartient à $\mathscr{C}$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ privé d'un ensemble fini. Ainsi tous les termes de la suite sont dans $\mathscr{C}$ à partir d'un certain rang. De plus, cette suite a pour limite B par continuité du produit externe. Donc B est adhérent à $\mathscr{C}$.

Ainsi tout élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est adhérent à $\mathscr{C}$, qui est donc $\boxed{\text{dense dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$.