1) Pour démontrer que $x \mapsto e^{-x}f(x)g(x)$ est intégrable (elle est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme produit de telles applications) , nous allons majorer $x \mapsto e^{-x}|f(x)||g(x)|$ par une fonction intégrable . On a :
$\forall x \in [0,+\infty[\quad e^{-x}|f(x)||g(x)| \leqslant \dfrac{e^{-x}(f(x)^2+g(x)^2)}{2}$
parce que $(|f(x)|-|g(x)|)^2 = (f(x)^2+g(x)^2) - 2|f(x)||g(x)| \geqslant 0$

Comme f et g sont dans F et que l'ensemble des fonctions intégrables sur $[0,+\infty[$ est un espace vectoriel , la fonction majorante est bien intégrable et par théorème de comparaison on a :

$$\boxed{x \longmapsto e^{-x}f(x)g(x) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+}$$

2) a) Démontrons que F est un sous espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,+\infty[\,,\mathbb{R})$:
Si f et g sont dans F et si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $t \mapsto e^{-x}(\alpha f(x)^2 = \alpha^2 e^{-x}(f(x)^2$ est intégrable et aussi , $e^{-x}\left(f(x)+g(x)\right)^2 = e^{-x}f(x)^2 + e^{-x}g(x)^2 + 2e^{-x}f(x)g(x)$ d'après la question précédente, comme combinaison linéaire de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
D'où :

$$\boxed{F \text{ est un espace vectoriel}}$$

b) Démontrons que l'application ϕ de $F \times F$ vers $\mathbb{R}$ définie par
$(f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)g(t)dt$ a bien les propriétés qui en font un produit scalaire :
- symétrique : $(f|g) = (g|f)$ parce que le produit des réels $f(x)$ et $g(x)$ est commutatif pour tout t dans $\mathbb{R}^+$. .
- bilinéaire : grâce à la distributivité de $\times$ par rapport à $+$ dans les réels , puis à la linéarité de l'intégrale :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}f(x)[\alpha g_1(x)+\beta g_2(x)]dx = \alpha\int_0^{+\infty} e^{-x}f(x)g_1(x)dx + \beta\int_0^{+\infty} e^{-x}f(x)g_2(x)dx$
On en déduit la bilinéarité par la symétrie.
- défini positif : L'application $x \mapsto e^{-x}\left(f(x)\right)^2$ est $\boxed{\text{continue}}$ et positive sur $[0,+\infty[$, alors
$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(f(x)\right)^2 dx \geqslant 0$ et
$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(f(x)\right)^2 dx = 0 \Longrightarrow \forall x \in [0,+\infty[\quad e^{-x}\left(f(x)\right)^2 = 0 \Longrightarrow \forall x \in [0,+\infty[\quad f(x) = 0.$ (car $e^{-x} > 0$ pour tout x)

3) a) • Soit $n \in \mathbb{N}$; $\varphi_n \;:\; x \longmapsto x^n e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$;
$x^2\ \varphi_n(x) = x^{n+2}e^{-x} \longrightarrow 0$ quand x tend vers $+\infty$ car $-1 < 0$.
Ainsi $\varphi_n(x) = o_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ est continue, positive et intégrable sur $[1,+\infty[$ car $2 > 1$ (fonction de Riemann), et on peut conclure que φ_n est intégrable sur $[1,\infty[$, et donc sur $[0,+\infty[$.
• Soit p une fonction polynômiale ; $p^2 \;:\; x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{p} b_k x^k$ en est une également, et
$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ e^{-x}(p(x))^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} b_k\ \varphi_k(x)$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ comme combinaison linéaire de telles applications par le premier point.
Ainsi, $E \subset F$.

b) Soit $X > 0$; par intégration par partie (les fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,X]$), on a pour $n \geqslant 1$:
$\displaystyle\int_0^X \varphi_n(x)dx = \left[-x^n\ e^{-x}\right]_0^X + n\int_0^X \varphi_{n-1}(x)dx = -X^n e^{-X} + n\int_0^X \varphi_{n-1}(x)dx$ car $0^n = 0$ comme $n \geqslant 1$.

Or $\lim_{X \to +\infty} X^n\ e^{-X} = 0$ car $-1 < 0$, donc en faisant tendre X vers $+\infty$,

on obtient donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_n(x)\, dx = n \int_0^{+\infty} \varphi_{n-1}(x)\, dx$, soit $I_n = nI_{n-1}$ si $n \geqslant 1$; ainsi $I_n = n!\ I_0$.

Or $\displaystyle\int_0^X \varphi_0(t)\, dt = 1 - e^{-X}$ qui tend vers 1 quand X tend vers $+\infty$, ainsi $I_0 = 1$ et donc $\boxed{I_n = n!}$.

4) a) On obtient aisément par des calculs directs ou la formule de Leibniz :
$L_0 = 1$, $L_1(X) = 1 - X$, $L_2(X) = X^2 - 4X + 2$, $L_3 = -X^3 + 9X^2 - 18X + 6$.

b) Utilisons la formule de Leibniz pour calculer $\varphi_n^{(n)}$ à partir de $\varphi_n(t) = e^{-x}\ x^n$:
Il est plus habile de dériver $n-k$ fois $x \longmapsto x^n$, dont la dérivée $n-k$ième est :
$x \longmapsto n.(n-1)\cdots(n-(n-k)+1)x^{n-(n-k)} = n.(n-1)\cdots(k+1)x^k = \dfrac{n!}{k!}$
alors que la dérivée $k$ième de $x \longmapsto e^{-x}$ est $x \longmapsto (-1)^k\ e^{-x}$:
$\forall x \in [0, +\infty[\ \ \varphi_n^{(n)}(x) = e^{-x} \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{n!}{k!} x^k \right)$. On a donc

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(n-k)!} \left(\frac{n!}{k!} \right)^2 x^k$$

On a bien : L_n est une fonction polynomiale, son degré est n et le coefficient de degré k est :

$$\boxed{a_{n,k} = \frac{(-1)^k}{(n-k)!} \left(\frac{n!}{k!} \right)^2}$$

Les vérifications sont laissées au lecteur.

5) a) En utilisant toujours la formule de Leibniz pour calculer la dérivée kième de φ_n (attention il faut changer d'indice de sommation, et on dérive seulement $k-j$ fois $x \longmapsto x^n$) on a pour $k < n$ on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, +\infty[\quad \varphi_n^{(k)}(x) &= e^{-x} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \frac{n!}{((n-(k-j))!} x^{n-(k-j)} \\ &= e^{-x} x^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \frac{n!}{(n-k+j)!} x^j. \end{aligned}$$

$\varphi_n^{(k)}$ est donc le produit de e^{-x} par une fonction polynôme Q divisible par x^{n-k} :
$Q(x) = x^{n-k} \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \frac{n!}{(n-k+j)!} x^j$, c'est à dire, comme $n-k \geqslant 1$:

$$\boxed{\forall k < n \ \ \varphi_n^{(k)}(0) = 0}$$

b) On a immédiatement, par l'expression ci-dessus : $\boxed{\varphi_n^{(k)}(x) \underset{+\infty}{\sim} (-1)^k\ x^n\ e^{-x}}$

(le terme de plus haut degré de $q(x)$ donne l'équivalent de $Q(x)$ au voisinage de $+\infty$).

c) Considérons $m < n$ et écrivons $(L_n|L_m) = \displaystyle\int_0^{+\infty} L_m(x) \varphi_n^{(n)}(x) dx$

On effectue une intégration par partie : les applications considérées sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, X]$ si $X > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^X L_m(x)\varphi_n^{(n)}\, dx &= \left[L_m(x)\varphi_n^{(n-1)} \right]_0^X - \int_0^X L'_m(x)\varphi_n^{(n-1)}\, dx = \\ &= L_m(X)\varphi_n^{(n-1)}(X) - L_m(0)\varphi_n^{(n-1)}(0) - \int_0^X L'_m(x)\varphi_n^{(n-1)}\, dx \end{aligned}$$

Or par 4) b) et 5) b), $L_m(X)\varphi_n^{(n-1)}(X) \underset{+\infty}{\sim} (-1)^{m+n-1} X^{m+n} e^{-X} \longrightarrow 0$ quand X tend vers $+\infty$.

De plus, $L_m(0)\varphi_n^{(n-1)}(0) = L_m(0)\ .\ 0 = 0$ par 5) a) car $n-1<n$.

En faisant tendre X vers $+\infty$, on a : $(L_m|L_n) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} L_m'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x)dx$.

En faisant une nouvelle intégration par partie, puis un passage à la limite on a :

$(L_m|L_n) = (-1)^2 \displaystyle\int_0^{+\infty} L_m^{(2)}(x)\varphi_n^{(n-2)}(x)dx$

(les arguments sont les mêmes : $L_m'(X)\varphi_n^{(n-2)}(X) \underset{+\infty}{\sim} m\ (-1)^{m+n-2}X^{m-1+n}e^{-X} \longrightarrow 0$ quand X tend vers $+\infty$ et $L_m'(0)\varphi_n^{(n-2)}(0) = L_m'(0)\ .\ 0 = 0$ par 5) a) car $n-2<n$).

En faisant m intégrations par parties en tout on a (rappel $m<n$, et $L^{(m)} = (-1)^m m!$) :

$(L_m|L_n) = (-1)^m\ (-1)^m\ m! \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-m)}(x)dx = m!\left(\lim_{X\to+\infty}\varphi_n^{(n-(m+1))}(X) - \varphi_n^{(n-(m+1))}(0)\right)$

qui vaut 0 car :

si $m \leqslant n-2$, on a $n-(n-(m+1)) = m+1 \leqslant n-1 < n$, donc on peut conclure par 5)a) et 5) b).

si $m = n-1$, $\varphi_n^{(n-(m+1))}(X) = \varphi_n^{(0)}(X) = \varphi_n(X) = X^n\ e^{-X}$, qui est nul en 0 ($n > m \geqslant 0$ donc $n \geqslant 1$) et tend vers 0 en $+\infty$.

Ainsi $\boxed{(L_m|L_n) = 0}$ si $m<n$.

d) Si $m=n$, par le même processus avec n intégrations par partie, on a :

$(L_n|L_n) = (-1)^n\ (-1)^n\ n! \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-n)}(x)dx = n! \int_0^{+\infty} \varphi_n(x)dx = n!\ I_n = (n!)^2$ par 3) b).

6) On reconnaît : $\left(\dfrac{L_n}{n!}|\dfrac{L_m}{m!}\right) = \begin{cases} 0 & si\ n \neq m \\ 1 & si\ n = m \end{cases}$, c'est à dire que :

$\boxed{\text{La famille } \left(\dfrac{L_k}{k!}\right)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est une base orthonormale de } E_n}$

7) a) P_n est une somme de polynômes de degré $n+2$: il est de degré au plus $n+2$.

D'après le calcul des coefficients de L_n faits en 4) :

- le coefficient de x^{n+2} est : $(-1)^{n+2} + (-1)^{n+1} = 0$.
- le coefficient de x^{n+1} est : $(-1)^{n+1}(n+2)^2 + (-1)^n(n+1)^2 - (2n+3)(-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}(n^2+4n+4-n^2-2n-1-2n-3) = 0$.

$$\boxed{P_n \in E_n}$$

On sait que $\alpha_k = \left(\dfrac{L_k}{k!}|P_n\right)$ car la base est orthonormale.

b) $Q \in E_n = vect\,(L_0,\cdots,L_n)$ donc $(Q|L_{n+1}) = 0$ car $(L_0,\cdots,L_{n+1})$ est une famille orthonormale.

c) • $(X\ Q|R) = \displaystyle\int_0^{+\infty} xQ(x)R(x)e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} Q(x)(xR(x))e^{-x}\,dx = (Q|X\ R)$

• Si $k \leqslant n-1$, $(X\ L_{n+1}|L_k) = (L_{n+1}|X\ L_k) = 0$ par b) car $deg(X\ L_k) = k+1 \leqslant n$ et donc $X\ L_k \in E_n$.

d) Si $k \in [\![0,n-1]\!]$, $P_n = L_{n+2} + (X-2n-3)L_{n+1}$ d'où par bilinéarité du produit scalaire : $(P_n|L_k) = (L_{n+2}|L_k) + (X\ L_{n+1}|L_k) - (2n+3)(L_{n+1}|L_k)$.

Par 6) et 7 c), on a donc $\alpha_k = \dfrac{1}{k!}\,(P_n|L_k) = 0$.

e) Par 4) b), $L_{n+1} + XL_n = (-1)^{n+1}X^{n+1} + (-1)^n X\ .\ X^n + T = T$ avec $Q \in E_n$, d'où le résultat.

$(P_n|L_n) = (L_{n+2}|L_n) + (X\ L_{n+1}|L_n) - (2n+3)(L_{n+1}|L_n) = 0 + (X\ L_{n+1}|L_n) + 0 = (L_{n+1}|X\ L_n)$

Ainsi : $(P_n|L_n) = (L_{n+1}|T - L_{n+1}) = (L_{n+1}|T) - (L_{n+1}|L_{n+1}) = 0 - ((n+1)!)^2 = -((n+1)!)^2$ par 6) et 7) b).

Donc $\alpha_n = \dfrac{1}{n!}\,(P_n|L_n) = -\dfrac{((n+1)!)^2}{n!}$.

Finalement, $P_n = L_{n+2} + (X - 2n - 3)L_{n+1} = -\dfrac{((n+1)!)^2}{n!}\dfrac{L_n}{n!} = -(n+1)^2\ L_n$, et donc

$$\boxed{\forall x \in [0, +\infty[\quad L_{n+2}(x) + (x - 2n - 3)L_{n+1}(x) + (n+1)^2 L_n(x) = 0}$$

8) a) • On a $L_n = \dfrac{1}{(n!)^2}\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X - a_i)^{\alpha_i}\ .\ \prod_{s=1}^{q}(X^2 + b_jX + c_j)^{\beta_i}$ où

p, q sont des naturels, $\alpha_1, \cdots, \alpha_p, \beta_1, \cdots, \beta_q$ sont des naturels non nuls, $a_1, \cdots, a_p, b_1, \cdots, b_q, c_1, \cdots, c_q$ des réels tels que : $b_j^2 - 4c_j < 0$ pour tout $j \in [\![1, q]\!]$.

On appelle Y_n l'ensemble des racines de L_n dans $\mathbb{R}\backslash]0, +\infty[$, X_n l'ensemble des racines de L_n dans $]0, +\infty[$ et d'ordre de multiplicité pair.

• Si Z_n est vide, avec des notations cohérentes :

$$L_n = \frac{1}{(n!)^2}\prod_{a \in Y_n}(X - a)^{\alpha_a}\ .\ \prod_{b \in X_n}(X - b)^{2\alpha_b}\ .\ \prod_{s=1}^{q}(X^2 + b_jX + c_j)^{\beta_i}$$

Une fonction polynômiale est **continue**, donc garde un signe constant sur un **intervalle** sur lequel elle ne s'annule pas :

Ainsi, si $a \in Y_n$, $(X - a)^{\alpha_a}$ garde un signe constant sur $]0, +\infty[$.

Comme $(X^2 + b_jX + c_j)^{\beta_i}$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$ (pas de racine réelles), et que $\displaystyle\prod_{b \in X_n}(X - b)^{2\alpha_b} = \left(\prod_{b \in X_n}(X - b)^{\alpha_b}\right)^2 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que L_n garde un signe constant sur $]0, +\infty[$.

• Or si $n \geqslant 1$, d'après 6), on a $(L_0|L_n) = 0$. Ainsi : $0 = (L_0|L_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} L_n(x)e^{-x}\,dx$.

Mais $x \longmapsto L_n(x)e^{-x}$ est continue sur $]0, +\infty[$, garde un signe constant sur $]0, +\infty[$, et donc y est identiquement nulle.

Comme $\exp > 0$, L_n est identiquement nulle sur $]0, +\infty[$, et donc $L_n = 0_{\mathbb{R}[X]}$ car $]0, +\infty[$ est infini. Ceci est absurde, car L_n n'est pas le polynôme nul (par 4) b)).

b) On a $S_n \in \mathbb{R}_m[X] = vect\,(L_0, \cdots, L_m)$ donc $(S_n|L_n) = 0$ car on suppose $m < n$ et $(L_0, \cdots, L_n)$ est une famille orthonormale.

Or $L_n = \dfrac{1}{(n!)^2}\displaystyle\prod_{k=1}^{m}(X - u_k)^{2\gamma_k+1}\ .\ \prod_{a \in Y_n}(X - a)^{\alpha_a}\ .\ \prod_{b \in X_n}(X - b)^{2\alpha_b}\ .\ \prod_{s=1}^{q}(X^2 + b_jX + c_j)^{\beta_i}$

d'où $S_n\ L_n = \dfrac{1}{(n!)^2}\displaystyle\prod_{k=1}^{m}(X - u_k)^{2(\gamma_k+1)}\ .\ \prod_{a \in Y_n}(X - a)^{\alpha_a}\ .\ \prod_{b \in X_n}(X - b)^{2\alpha_b}\ .\ \prod_{s=1}^{q}(X^2 + b_jX + c_j)^{\beta_i}$

Par le même raisonnement qu'en a), on obtient que $S_n\ L_n$ est continue et de signe constant sur $]0, +\infty[$, et comme $0 = (S_n|L_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} S_n(x)L_n(x)e^{-x}\,dx$, on a aussi (même raisonnement également), que $S_n\ L_n = 0_{\mathbb{R}[X]}$; ceci est absurde, car S_n et L_n sont non nuls et $\mathbb{R}[X]$ intègre.

Ainsi $n \leqslant m$.

c) Ainsi L_n possède au moins n racines distinctes dans $]0, +\infty[$ d'ordre de multiplicité impair, donc supérieur ou égal à 1. Or L_n est de degré n, et donc L_n possède au plus n racines distinctes d'ordre de multiplicité 1 : finalement L_n possède donc exactement n racines distinctes simples, qui sont toutes dans $]0, +\infty[$.

9) a) $\forall x \in [0, +\infty[\ ,\ \varphi_{n+1}(t) = x\varphi_n(x)$.

En appliquant la formule de Leibniz, calculons la dérivée $(n+1)^{ième}$ de φ_{n+1} :

$\forall x \in [0, +\infty[\ ,\ \varphi_{n+1}^{(n+1)}(x) = x\varphi_n^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1}\varphi_n^{(n)}(x) = x\varphi_n^{(n+1)}(x) + (n+1)\varphi_n^{(n)}(x)$

$\forall x \in [0, +\infty[\ ,\ \varphi_n^{(n)}(x) = e^{-x}L_n(x)$ donne par dérivation : $\varphi_n^{(n+1)}(x) = e^{-x}\,(L_n'(x) - L_n(x))$

On en déduit L_{n+1} en fonction de L_n et de L_n' :

$\forall x \in [0, +\infty[\ ,\ L_{n+1}(x) = e^x\varphi_{n+1}^{(n+1)}(x) = x\,(L_n'(x) - L_n(x)) + (n+1)L_n(x)$, qui est la formule cherchée :

$$\boxed{L_{n+1} = X.L'_n + (n+1-X)\,L_n}$$

b) On sait d'après 7.e) :

$$L_{n+2} + (X - 2n - 3)\,L_{n+1} + (n+1)^2\,L_n = 0.$$

D'après a),

$$L_{n+2} = XL'_{n+1} + (n+2-X)\,L_{n+1}.$$

d'où

$$XL'_{n+1} + (n+2-X)\,L_{n+1} + (X - 2n - 3)\,L_{n+1} + (n+1)^2\,L_n = 0$$
$$XL'_{n+1} + (-n-1))\,L_{n+1} + (n+1)^2\,L_n = 0$$

Or par a), on a :

$$L_{n+1} = X.L'_n + (n+1-X)\,L_n \text{ et donc } L'_{n+1} = XL''_n + (n+2-X)L'_n - L_n$$

Remplaçant dans l'égalité précédente, il vient :

$$X^2L''_n + X(n+2-X)L'_n - XL_n - (n+1)[XL'_n + (n+1-X)L_n] + (n+1)^2\,L_n = 0$$
$$X^2L''_n + X(1-X)L'_n + nXL_n = 0$$

Par intégrité de $\mathbb{R}[X]$, on peut simplifier par X :

$$XL''_n + (1-X)\,L'_n + nL_n = 0$$

$\boxed{L_n \text{ est donc solution sur } [0,+\infty[\text{ de l'équation différentielle } (\varepsilon_n)\ :\ xz" + (1-x)z' + nz = 0}$