

On désigne par F l'ensemble des fonctions réelles f définies et continues sur \mathbb{R}^+ et telles que la fonction $x \mapsto e^{-x}(f(x))^2$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

On note E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles définies sur $[0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le sous-espace formé par les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n . Pour tout naturel n , on note φ_n et L_n les fonctions de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R} définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \varphi_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = e^x \varphi_n^{(n)}(x)$$

où $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième de φ_n .

- 1) Soit $(f, g) \in F^2$. Montrer que $x \mapsto e^{-x} f(x)g(x)$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .
- 2) a) Etablir que F est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- b) Montrer que

$$(f, g) \mapsto (f|g) = \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)g(x)dx \text{ est un produit scalaire sur } F$$

Dans la suite, on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

- 3) a) Montrer que E est inclus dans F .

- b) Calculer pour tout naturel n l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = \int_0^{+\infty} \varphi_n(x) dx$.

Dorénavant, on identifiera chaque polynôme avec la restriction de sa fonction polynomiale à \mathbb{R}^+ .

- 4) a) Calculer L_0, L_1, L_2 et L_3 .
- b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la règle de Leibniz, déterminer L_n et montrer que c'est un élément de E : on précisera le degré de L_n et le coefficient $a_{n,k}$ de x^k dans l'expression de L_n .
On vérifiera que

$$a_{n,n} = (-1)^n, \quad a_{n,n-1} = (-1)^{n-1} n^2 \quad \text{et} \quad a_{n,0} = n!$$

- 5) a) Montrer que pour tout $k < n$, $\varphi_n^{(k)}(0) = 0$.
- b) Donner un équivalent de $\varphi_n^{(k)}(x)$ quand x tend vers $+\infty$ (n et k fixés).
- c) Soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m < n$.

En écrivant $(L_m|L_n) = \int_0^{+\infty} L_m(x) \varphi_n^{(n)}(x) dx$, montrer que

$$(L_m|L_n) = - \int_0^{+\infty} L'_m(x) \varphi_n^{(n-1)}(x) dx$$

Itérer le procédé (en justifiant) et en déduire la valeur de $(L_m|L_n)$.

- d) Par le même procédé (on ne demande plus de justifier), exprimer $(L_n|L_n)$ en fonction de I_n (calculé en 3.b) puis de n .

- 6) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\left(\frac{L_k}{k!}\right)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormale de E_n .
- 7) Soit $n \in \mathbb{N}$ et P_n définie par : $P_n = L_{n+2} + (X - 2n - 3)L_{n+1}$.

a) Montrer que $P_n \in E_n$.

Ainsi, P_n se décompose sur la base orthonormale $\left(\frac{L_k}{k!}\right)_{0 \leq k \leq n}$ de E_n : $P_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{L_k}{k!}$.

b) Rappeler la valeur des α_k en fonction du produit scalaire.

Le but des questions suivantes est de déterminer les α_k .

c) Montrer que pour tout $Q \in E_n$, $(L_{n+1}|Q) = 0$.

d) Justifier que pour tout couple (R, Q) d'éléments de E^2 , on a : $(XQ|R) = (Q|XR)$.

En déduire que $(X L_{n+1}|L_k) = 0$ pour $k \leq n - 1$.

e) En déduire que $\forall n \geq 1, \forall k \in \{0, \dots, n - 1\}, (P_n|L_k) = 0$.

En déduire les valeurs de $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$.

f) Il reste donc à calculer α_n : montrer que $L_{n+1} + X L_n$ appartient à E_n ; en déduire la valeur de α_n .

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$L_{n+2} + (X - 2n - 3)L_{n+1} + (n + 1)^2 L_n = 0$$

8) Cette question a pour objet de montrer que les zéros de L_n sont réels et strictement positifs lorsque $n \geq 1$.

Soit $n \geq 1$, on désigne par Z_n l'ensemble des zéros réels de L_n , appartenant à $]0, +\infty[$ et d'ordre de multiplicité impair.

a) Ecrire la forme générale de la décomposition de L_n en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. On isolera les facteurs correspondant aux éléments de Z_n .

Montrer que si Z_n est vide alors L_n est de signe constant au sens large sur $[0, +\infty[$.

En considérant $(L_0|L_n)$, montrer que Z_n est non vide.

b) Soit donc $Z_n = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ avec $1 \leq m \leq n$ et $u_1 < u_2 < \dots < u_m$.

On pose $S_n = \prod_{k=1}^m (X - u_k)$. En considérant $(S_n|L_n)$, montrer que l'hypothèse $m < n$ conduit à une contradiction, et en déduire que $m = n$.

c) Déduire de ce qui précède que les zéros de L_n sont tous réels, simples et appartenant à $]0, +\infty[$.

9) a) Etablir : $L_{n+1} = X L_n' + (n + 1 - X)L_n$

On pourra remarquer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \varphi_{n+1}(x) = x\varphi_n(x)$ et utiliser la règle de Leibniz.

b) En utilisant la relation de la question 7.e, montrer que L_n est une solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(\epsilon_n) \quad x z''(x) + (1 - x)z'(x) + n z(x) = 0$$