Notations

— L'entier n désigne un entier naturel non nul.
— On note $\mathscr{M}_n$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille (n,n) dont la matrice unité est notée I_n.
— On note E_n l'espace vectoriel des matrices réelles de taille $(n,1)$ (matrices colonnes). On le munit de son produit scalaire usuel et de la norme (euclidienne) associée définis par :

$$(X|Y) = X^\top Y \quad \text{et} \quad \|X\| = \sqrt{X^\top X}.$$

— Pour $A \in \mathscr{M}_n$, on note $A^\top$ la transposée de A.
— On note $\mathscr{S}_n$ (respectivement $\mathscr{A}_n$) le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n$ constitué des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de $\mathscr{M}_n$.
— $\mathrm{O}_n = \{A \in \mathscr{M}_n,\ AA^\top = I_n\}$ est le groupe orthogonal d'ordre n.
— $\mathrm{SO}_n = \{A \in \mathrm{O}_n,\ \det(A) = 1\}$ est le groupe spécial orthogonal d'ordre n.
— Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ et $S(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$.
On rappelle que $\mathrm{SO}_2 = \{R(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ et $\mathrm{O}_2 = \mathrm{SO}_2 \cup \{S(t),\ t \in \mathbb{R}\}$.

Définition 1 *Une matrice A de $\mathscr{M}_n$ est dite* ***normale*** *lorsqu'elle commute avec sa transposée, c'est-à-dire lorsque $AA^\top = A^\top A$.*

Définition 2 *Une matrice $A \in \mathscr{M}_n$ est dite* ***orthogonalement semblable à*** *$B \in \mathscr{M}_n$ s'il existe $Q \in O_n$ tel que $B = Q^\top AQ$. (On pourra noter en abrégé : A est* ***ORTS*** *à B.)*

Objectifs

Ce problème vise à établir que, pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n$, les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

$\mathscr{C}_1$ Il existe un polynôme P à coefficients réels tel que $A^\top = P(A)$.
$\mathscr{C}_2$ La matrice A est normale.
$\mathscr{C}_3$ Pour tout $X \in E_n$, $\|A^\top X\| = \|AX\|$.
$\mathscr{C}_4$ La matrice A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :
— soit de taille $(1,1)$,
— soit de taille $(2,2)$ du type $rR(t)$, où $(r,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

On pourra utiliser, sans démonstration, les deux résultats suivants :
Théorème 1 *Tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle admet au moins une droite ou un plan stable.*
Théorème 2 *Si $A \in \mathscr{M}_n$ et $B \in \mathscr{M}_n$ sont telles qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ vérifiant $B = Q^{-1}AQ$, alors pour tout polynôme P à coefficients réels, on a $P(B) = Q^{-1}P(A)Q$.*

1 - Question préliminaire

1) Démontrer que la relation **ORTS** est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n$.
2) Soit $A \in \mathscr{M}_n$. Montrer que $\forall (X,Y) \in E_n^2, (AX \mid Y) = (X \mid A^\top Y)$.

2 - Exemples

3) Montrer que les éléments de $\mathscr{S}_n$ vérifient les conditions $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$, et que ceux de $\mathscr{A}_n$ vérifient les conditions $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.
4) Montrer que les éléments de O_n vérifient les conditions $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.
5) Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$.
   Montrer que les matrices rT, où $r > 0$ et $T \in \mathrm{O}_2$, vérifient les conditions $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_4$.

3 - Deux premières implications

Soit $A \in \mathscr{M}_n$.

6) Montrer que si A vérifie la condition $\mathscr{C}_1$, alors A vérifie la condition $\mathscr{C}_2$.
7) Montrer que si A vérifie la condition $\mathscr{C}_2$, alors A vérifie la condition $\mathscr{C}_3$.

4 - La condition (C_3) implique la condition (C_4)

Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$ et soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2$ vérifiant la condition $\mathscr{C}_3$.

8) Montrer que $c = b$ ou bien ($b \neq 0$ et $c = -b$ et $a = d$).
   On pourra utiliser, par exemple, les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *de* E_2*.*
   En déduire que A vérifie la condition $\mathscr{C}_4$.

Dans toute la suite de cette partie, on se donne $A \in \mathscr{M}_n$ vérifiant la condition $\mathscr{C}_3$.

9) Montrer que pour tout réel λ, la matrice $A - \lambda I_n$ vérifie $\mathscr{C}_3$.
10) Soit λ un réel, montrer que $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(A^\top - \lambda I_n)$ puis que pour tout $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda\}$, $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ et $\mathrm{Ker}(A - \mu I_n)$ sont orthogonaux.
11) En utilisant la question précédente, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour qu'elle soit diagonalisable.
12) Montrer que toute matrice orthogonalement semblable à A vérifie $\mathscr{C}_3$.
13) Pour $n \geqslant 3$, montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, où $A_1 \in \mathscr{M}_p$ et $A_2 \in \mathscr{M}_{n-p}$ vérifient $\mathscr{C}_3$, avec $p \in \{1, 2\}$.
14) Montrer que si A vérifie la condition $\mathscr{C}_3$, alors A vérifie la condition $\mathscr{C}_4$.

5 - La condition (C_4) implique la condition (C_1)

Soit $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ une famille de n complexes deux à deux distincts.

15) Établir l'existence d'un unique polynôme P de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que :
$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad P(z_k) = \overline{z_k}.$$
   On suppose de plus que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\overline{z_k} \in Z$.
   Montrer alors que le polynôme P est réel.

Soient $(r, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(re^{it}) = re^{-it}$.

16) Montrer que $P(rR(t)) = (rR(t))^\top$.
17) Montrer que si $A \in \mathscr{M}_n$ vérifie la condition $\mathscr{C}_4$, alors A vérifie la condition $\mathscr{C}_1$.