Exercice I

A - Lois zêta

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) \geqslant 0$ (car $\zeta(x) > 1 > 0$)
De plus, dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$;

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(x)n^x} = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{\zeta(x)}\zeta(x) = 1$$

On en déduit la formule donnée définie bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

2. On calcule dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n) = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x-1}}$$

La variable aléatoire X a une espérance finie quand cette série converge (par définition). Or cette série est convergente si et seulement si $x-1>1$ c'est-à-dire si et seulement si $\boxed{x>2}$.

Dans ce cas, $\boxed{E(X) = \dfrac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}}$

3. Soit $k \geqslant 1$. On calcule dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. D'après le théorème de transfert

$$E(X^k) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k P(X=n) = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x-k}}$$

La variable aléatoire X admet un moment d'ordre k quand cette série converge (par définition). Or cette série est convergente si et seulement si $x-k>1$ c'est-à-dire si et seulement si $\boxed{x>k+1}$.

Dans ce cas, $\boxed{E(X) = \dfrac{\zeta(x-k)}{\zeta(x)}}$

4. On sait que X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance finie, donc si et seulement si $x>3$ et, dans ce cas, d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\zeta(x-2)\zeta(x) - \zeta(x-1)^2}{\zeta(x)^2}.$$

5. Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(X \in a\mathbb{N}^*) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (X=ka)\right) \quad \text{(par définition de } a\mathbb{N}^*) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=ka) \quad \text{(événements incompatibles)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(x)} \frac{1}{(ak)^x} = \frac{1}{\zeta(x)a^x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{\zeta(x)a^x}\zeta(x) = \frac{1}{a^x}. \end{aligned}$$

B - Mutuelle indépendance

6. Par définition, pour monter que la famille $((X = p_i\mathbb{N}^*))_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants, il faut montrer que pour toute sous famille $(i_1, ..., i_r)$ d'éléments distincts de $\mathbb{N}^*$, $P(\bigcap_{k=1}^r (X \in p_{i_k}\mathbb{N}^*)) = \prod_{i=1}^r P(X \in p_{i_k}\mathbb{N}^*)$
On considère donc $(i_1, ..., i_r)$ des éléments distincts de $\mathbb{N}^*$. On sait que pour $\omega \in \Omega$,
$$\begin{aligned}
\omega \in \bigcap_{k=1}^{r} (X \in p_{i_k}\mathbb{N}^*) &\iff \forall k \in [\![1,k]\!],\quad \omega \in (X \in p_{i_k}\mathbb{N}^*)\\
&\iff \forall k \in [\![1,k]\!], p_{i_k} | X(\omega)\\
&\iff \left(\prod_{i=1}^{k} p_{i_k}\right) | X(\omega) \qquad \text{(car les } p_i \text{ sont premiers entre eux)}\\
&\iff \omega \in (X \in a\mathbb{N}^*) \qquad (\text{où } a = \prod_{k=1}^{r} p_{i_k})
\end{aligned}$$
On en déduit que
$$P\left(\bigcap_{k=1}^{r} (X \in p_{i_k}\mathbb{N}^*)\right) = P(X \in a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^x} = \left(\prod_{k=1}^{r} p_{i_k}\right)^{-x} = \prod_{k=1}^{r} p_{i_k}^{-x} = \prod_{i=1}^{r} P(X \in p_{i_k}\mathbb{N}^*)$$
On a bien montré que
$\boxed{\text{la famille } ((X = p_i\mathbb{N}^*))_{i\in\mathbb{N}^*} \text{ est une famille d'événements mutuellement indépendants}}$

7. La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante car pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$B_{n+1} = \bigcap_{k=1}^{n+1} (X \notin p_k \in \mathbb{N}^*) = (X \notin p_{n+1} \in \mathbb{N}^*) \cap B_n \subset B_n$$
Par continuité décroissante, on a donc
$$\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X \notin p_k\mathbb{N}^*)\right).$$
Or, pour tout $\omega \in \Omega$,
$$\begin{aligned}
\omega \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} (X \notin p_k\mathbb{N}^*) &\iff \forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \omega \in (X \notin p_k\mathbb{N}^*)\\
&\iff \forall k \in \mathbb{N}^*,\quad p_k \not| X(\omega)\\
&\iff \forall p \in \mathcal{P},\quad p \not| X(\omega)\\
&\iff X(\omega) = 1
\end{aligned}$$
donc
$$\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X \notin p_k\mathbb{N}^*)\right) = P(X = 1).$$

Par suite, pour tout $x \in]1,+\infty[$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta(x)} = P(X=1) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) &= \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X \notin p_k\mathbb{N}^*)\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} P(X \notin p_k\mathbb{N}^*) \quad \text{(indépendance admise après la question 6)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - P(X \in p_k\mathbb{N}^*)) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right) \quad \text{(d'après la question 5).}
\end{aligned}$$

C - Deux variables indépendantes suivant une loi zêta

8. On a

$$\begin{aligned}
A &= \bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{(X \in p\mathbb{N}^*) \cap (Y \in p\mathbb{N}^*)} = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} ((X \notin p\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p\mathbb{N}^*)) \\
&= \bigcap_{i=1}^{+\infty} ((X \notin p_i\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_i\mathbb{N}^*)) \quad (\text{car } \mathcal{P} = \{p_i,\ i \in \mathbb{N}^*\}) \\
&= \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{i=1}^{n} ((X \notin p_i\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_i\mathbb{N}^*))\right) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n.
\end{aligned}$$

donc, d'après la propriété de la continuité décroissante, comme C_n forme une suite décroissante d'événements, on a :

$$P(A) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} ((X \notin p_k\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k\mathbb{N}^*))\right).$$

Or, on peut démontrer comme à la question 6 que les événements $((X \in p_k\mathbb{N}^*) \cap (Y \in p_k\mathbb{N}^*))_{k\in 1..n}$ sont mutuellement indépendants (le résultat final sera au carré), donc leurs complémentaires, $((X \notin p_k\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k\mathbb{N}^*))_{k\in 1,..,n}$ sont aussi indépendants, donc

$$\begin{aligned}
P(A) &= \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} ((X \notin p_k\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k\mathbb{N}^*))\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} P\left((X \notin p_k\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k\mathbb{N}^*)\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - P\left((X \in p_k\mathbb{N}^*) \cap (Y \in p_k\mathbb{N}^*)\right)\right) \quad \text{(en passant au complémentaire)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - P(X \in p_k\mathbb{N}^*)P(Y \in p_k\mathbb{N}^*)) \quad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\frac{1}{p_k^x}\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^{2x}}\right) = \frac{1}{\zeta(2x)} \quad \text{(d'après la question 7 avec } 2x > 1)
\end{aligned}$$

D - Deux variables indépendantes suivant une loi uniforme

9. Par définition du PGCD, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$W_n(\omega) \in k\mathbb{N}^* \iff k \mid U_n(\omega) \wedge V_n(\omega) \iff (k \mid U_n(\omega) \text{ et } k \mid V_n(\omega))$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} P(W_n \in k\mathbb{N}^*) &= P((U_n \in k\mathbb{N}^*) \cap (V_n \in k\mathbb{N}^*)) \\ &= P(U_n \in k\mathbb{N}^*)P(V_n \in k\mathbb{N}^*) \quad (U_n \text{ et } V_n \text{ indépendantes}) \\ &= P(U_n \in k\mathbb{N}^*)^2 \quad (\text{même loi}). \end{aligned}$$

Or, les entiers j de $[\![1, n]\!]$ vérifiant $k \mid j$ sont les éléments de $k\mathbb{N}^* \cap [\![1, n]\!]$, c'est-à-dire les entiers qui s'écrivent ki avec $i \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $1 \leqslant ki \leqslant n \Leftrightarrow 1 \leqslant i \leqslant n/k \Leftrightarrow 1 \leqslant i \leqslant \lfloor n/k \rfloor$ (car i est un entier). On a donc $\{j \in [\![1, n]\!] \ , \ k \mid j\} = \{ki \ , \ \ i \in [\![1, \lfloor n/k \rfloor]\!]\}$.
Enfin, comme $U_n \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$, on obtient :

$$P(W_n \in k\mathbb{N}^*) = P(U_n \in k\mathbb{N}^*)^2 = \left(\frac{\operatorname{card}\{ki \ , \ \ i \in [\![1, \lfloor n/k \rfloor]\!]\}}{\operatorname{card}[\![1, n]\!]}\right)^2 = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2.$$

10. Soit $m \geqslant 1$. Pour tout $n \geqslant 1$

$$\sum_{k=1}^{m} P(W_n = k) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} P(W_n = k) = 1$$

En passant à la limite pour $n \to +\infty$ on en déduit que

$$\sum_{k=1}^{m} \ell_k \leqslant 1$$

Montrons maintenant que les séries $\sum\limits_{k \geqslant 1} P(W_n = k)$ convergent uniformément (par rapport à n) vers 1. Pour cela on remarque que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier $k \geqslant 1$,

$$P(W_n = k) \leqslant P(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2 \leqslant \left(\frac{n/k}{n}\right)^2 = \frac{1}{k^2}$$

De ce fait, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$1 - \sum_{k=1}^{m} P(W_n = k) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} P(W_n = k) \leqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

La série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ étant convergente, il existe $M \geqslant 1$ tel que pour $m \geqslant M$, $\sum\limits_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \varepsilon$. Pour un tel m, on a donc que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=1}^{m} P(W_n = k) \geqslant 1 - \varepsilon$.
Il suffit alors de faire tendre n vers $+\infty$ pour obtenir que

$$\sum_{k=1}^{m} \ell_k \geqslant 1 - \varepsilon$$

Remarque : La preuve ci-dessus est une version du théorème de double limite. Si on pose pour tout entier $k \geqslant 1$, $f_k : n \mapsto P(W_n = k)$.
— La série de fonctions $\sum\limits_{k \geqslant 1} f_k$ converge simplement vers $S : n \mapsto 1$ car pour tout entier n, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(W_n = k) = 1$.

— Pour tout entier $k \geqslant 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_k(n) = \ell_k$.
— Il y a convergence uniforme de la série de fonctions sur $\mathbb{N}^*$ vers S puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| S(n) - \sum_{k=1}^{m} f_k(n) \right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Le théorème de double limite affirme alors que

$$1 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_k(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ell_k$$

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(W_n \in k\mathbb{N}^*) \in [0,1]$, donc $\ell_k = \lim\limits_{n\to+\infty} P(W_n \in k\mathbb{N}^*) \in [0,1]$.

De plus, la question 10 implique que $\lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{m} \ell_k = 1$. C'est-à-dire que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \ell_k$ converge et la somme vaut 1.

On a donc $\boxed{(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ définit une loi de probabilité sur } \mathbb{N}^*}$

12. Pour tout $n, k \in {\mathbb{N}^*}^2$,

$$n/k - 1 < \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \leqslant n/k, \text{ donc } \frac{1}{k} - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor n/k \rfloor}{n} \leqslant \frac{1}{k}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{k}$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor n/k \rfloor}{n} = \dfrac{1}{k}$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} P(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n} \right)^2 = \frac{1}{k^2}.$$

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(W \in k\mathbb{N}^*) &= \lim_{n\to+\infty} P(W_n \in k\mathbb{N}^*) \quad \text{(propriété admise avec } B = k\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}^*) \\ &= \frac{1}{k^2} \\ &= P(X \in k\mathbb{N}^*) \quad \text{ où } X \text{ suit une loi zêta de paramètre 2 (d'après la question 5)} \end{aligned}$$

D'après la seconde propriété admise, $\boxed{W \text{ suit une loi zêta de paramètre } 2}$
On a alors $\ell_1 = P(W = 1) = P(X = 1) = \dfrac{1}{\zeta(2) 1^2} = \dfrac{1}{\zeta(2)}$.
Or,

$$P(W = k) = \lim_{n\to+\infty} P(W_n = 1) = \lim_{n\to+\infty} P(U_n \wedge V_n = 1)$$

Donc, quand n tend vers $+\infty$, la probabilité, quand on prend indépendamment deux nombres au hasard dans $[\![1, n]\!]$ (loi uniforme) que ces deux nombres soient premiers entre eux, tend vers $\dfrac{1}{\zeta(2)} \underset{\text{culture}}{=} \dfrac{1}{\pi^2/6} = \dfrac{6}{\pi^2}$.

Exercice II

Partie I - Résultant de deux polynômes :

1. a) Soit p, q deux entiers naturels. Soit P, Q des polynômes de degré au plus p et au plus q.
L'application $u_{p,q,P,Q}$ est une application linéaire car $\forall (A_1, B_1) \in E \quad \forall (A_2, B_2) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} u_{p,q,P,Q}(\lambda(A_1, B_1) + (A_2, B_2)) &= u_{p,q,P,Q}(\lambda A_1 + A_2, \lambda B_1 + B_2) \\ &= P(\lambda A_1 + A_2) + Q(\lambda B_1 + B_2) \\ &= \lambda(PA_1 + QB_1) + (PA_2 + QB_2) \\ &= \lambda u_{p,q,P,Q}(A_1, B_1) + u_{p,q,P,Q}(A_2, B_2) \end{aligned}$$

b) Pour $k \in [\![0, q-1]\!]$, $u_{p,q,P,Q}((X^k, 0)) = X^k P$. Cela implique que la $(k+1)-$ème colonne de la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u_{p,q,P,Q})$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_0 \\ \vdots \\ a_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ où a_0 figure à la $(k+1)$-ème ligne.

De même, Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $u_{p,q,P,Q}(0, X^k) = QX^k$. Cela implique que la $(q+j+1)-$ème colonne de la matrice M est $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_0 \\ \vdots \\ b_q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ où b_0 figure à la $(j+1)$-ème ligne.

$\boxed{\text{La matrice } M \text{ est donc la matrice } M_{p,q,P,Q}}$

2. a) — $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $u_{p,q,P,Q}$ est bijective
Alors elle est surjective. Comme $1_{\mathbb{C}[X]}$ appartient à F,

$$\exists (A, B) \in E \quad 1_{\mathbb{C}[X]} = u_{p,q,P,Q}(A, B) = PA + QB$$

$\boxed{\text{Par le théorème de Bézout, } P \text{ et } Q \text{ sont premiers entre eux}}$

— $\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, supposons P et Q premiers entre eux. Soit $(A, B) \in \mathrm{Ker}(u_{p,q,P,Q})$. On a $PA + QB = 0$ ce qui implique $P(-A) = QB$ donc P divise QB.
Comme P et Q sont premiers entre eux P divise B par le théorème de Gauss. En remarquant que $d^o(B) < p = d^o(P)$ on obtient que $B = 0$. De même, $A = 0$.
Ainsi $\mathrm{Ker}(u) \subset \{0_E\}$ donc $u_{p,q,P,Q}$ est injective. Comme $dim(E) = q + p = dim(F)$, $\boxed{u_{p,q,P,Q} \text{ est bijective}}$

b) En utilisant ce qui précède

$$\mathrm{Res}(P, Q) \neq 0 \iff \det(M_{p,q,P,Q}) \neq 0 \iff \det(u_{p,q,P,Q}) \neq 0 \iff u_{p,q,P,Q} \text{ est bijective}$$

On a donc par la question 2.a) :

$$\mathrm{Res}(P,Q) \neq 0 \iff P \text{ et } Q \text{ sont premiers entre eux}$$

3. a) Un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine multiple dans $\mathbb{C}$ si et seulement s'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = P'(z) = 0$.
Or deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement ils n'ont aucune racine **complexe** commune (deux polynômes sont premiers entre eux ssi ils n'ont aucun diviseur irréductible commun, et les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont de degré 1 par le théorème de d'Alembert-Gauss).
Ainsi un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ a donc une racine multiple si et seulement si P et P' ne sont pas premiers entre eux, ce qui équivaut (en supposant P de degré au moins deux pour respecter l'énoncé) que $\mathrm{Res}(P,P') = 0$.

b) *Application* Le polynôme $P = X^3 + aX + b$ admet une racine multiple si et seulement si

$$\begin{aligned}
0 &= \mathrm{Res}(P,P') \\
&= \begin{vmatrix} b & & a & & \\ a & b & 0 & a & \\ 0 & a & 3 & 0 & a \\ 1 & 0 & & 3 & 0 \\ 0 & 1 & & & 3 \end{vmatrix} \\
&= a \begin{vmatrix} b & & a & \\ a & b & 0 & a \\ 1 & 0 & & 3 \\ 0 & 1 & & \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} b & & a & \\ a & b & 0 & a \\ 0 & a & 3 & 0 \\ 1 & 0 & & 3 \end{vmatrix} \text{ par développement selon la dernière colonne} \\
&= a^2 \begin{vmatrix} b & & a \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{vmatrix} - 3a \begin{vmatrix} b & & a \\ a & b & 0 \\ 0 & 1 & \end{vmatrix} + 3a \begin{vmatrix} b & & a \\ 0 & a & 3 \\ 1 & 0 & \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} b & & a \\ a & b & 0 \\ 0 & a & 3 \end{vmatrix} \text{ par la même technique} \\
&= a^3 - 3a^3 - 3a^3 + 9(3b^2 + a^3) \\
&= \boxed{4a^3 + 27b^2}
\end{aligned}$$

c) On considère $f : P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto \det(M_{n,n-1,P,P'})$. En particulier $f(P) = \mathrm{Res}(P,P')$ si P est de degré n. On remarque que $\boxed{\Delta_n = f^{-1}(\mathbb{C}^*)}$ puisque

— si P est de degré n, P a n racines distinctes ssi $Res(P,P') \neq 0$

— si P est de degré strictement inférieur à n alors P n'a pas n racines distinctes, et $f(P)$ est nul car $M_{n,n-1,P,P'}$ n'est pas inversible car l'application $u_{n,n-1,P,P'}$ associée n'est pas surjective car son image est incluse dans $\mathbb{C}_{2n-3}[X]$ donc n'est pas égale à $\mathbb{C}_{n+n-1-1}[X]$.

Or $\mathbb{C}^*$ est ouvert (car son complémentaire $\{0\}$ est fermé) et $\boxed{f \text{ est continue}}$ car :
$P \mapsto P'$ est continue car linéaire sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui est de dimension finie
$(P,Q) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X] \mapsto \det(M_{n,n-1,P,Q})$ est continue car polynomiale en les coefficients de ses arguments.
Donc $\boxed{\Delta_n \text{ est un ouvert de } \mathbb{C}_n[X]}$

Partie II - Matrices diagonalisables :

4. On veut montrer que $E_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Pour cela, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, exhibons une suite $(A_p) \in E_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ telle que $(A_p) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} A$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe $P \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = T$ soit triangulaire supérieure. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de T. On pose alors pour tout $p \geqslant 1$,

$$T_p = T + \operatorname{diag}\left(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, \frac{n}{p}\right)$$

où $\operatorname{diag}\left(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, \frac{n}{p}\right)$ est la matrice diagonale ayant $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, \frac{n}{p}$ comme coefficients diagonaux. Il est clair que

$$\lim_{p \to +\infty} \operatorname{diag}\left(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, \frac{n}{p}\right) = 0$$

et donc $(T_p) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} T$.

De plus, les coefficients diagonaux de T_p sont deux à deux distincts dès de $\frac{n}{p}$ est strictement inférieur au minimum des modules des différences entre deux coefficients distincts de la diagonale de T. En effet, pour i, j dans $[\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$:

— Si $\lambda_i = \lambda_j$, $\lambda_i + \frac{i}{p} \neq \lambda_j + \frac{j}{p}$.

— Si $\lambda_i \neq \lambda_j$, $|\frac{i}{p} - \frac{j}{p}| \leqslant \frac{n}{p} < |\lambda_i - \lambda_j|$ ce qui implique que $\lambda_i + \frac{i}{p} \neq \lambda_j + \frac{j}{p}$.

On en déduit que $T_p \in E_n(\mathbb{C})$ à partir d'un certain rang N.

Il suffit alors de poser pour $p \geqslant 0$, $A_p = PT_{N+p+1}P^{-1}$. En effet,

— Comme $(T_p) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} T$, par continuité du produit matriciel, $(T_p) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} PTP^{-1} = A$

— Pour $p \geqslant 0$, $T_{N+p+1} \in E_n(\mathbb{C})$ et donc A_p qui lui est semblable aussi.

$\boxed{\text{Ainsi } E_n(\mathbb{C}) \text{ est dense dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$

De plus $E_n(\mathbb{C}) \subset D_n(\mathbb{C})$ car toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

La suite (A_p) construite ci-dessus est aussi une suite de matrices de $D_n(\mathbb{C})$.

Donc $\boxed{D_n(\mathbb{C}) \text{ est dense dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$

5. L'application $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \chi_M \in \mathbb{C}_n[X]$ est continue car les coefficicents de χ_M (ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$) sont polynomiaux en les coefficients de M

6. Par définition, $E_n(\mathbb{C}) = g^{-1}(\Delta_n)$ où $g : M \mapsto \chi_M$.

   Comme Δ_n est ouvert de $\mathbb{C}_n[X]$ d'après 3.c) et que g est continue, $\boxed{E_n(\mathbb{C}) \text{ est ouvert dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$

7. a) Considérons $B = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon/2 & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda & & & \\ & & & \mu_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_{n-p} \end{pmatrix}$.

   Elle vérifie que $||B - A||_\infty \leqslant \varepsilon$. De plus, elle n'est pas diagonalisable car le sous-espace propre associé à λ n'est pas de dimension p car notant $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, ce sous-espace est inclus dans $\operatorname{Vect}(E_1, \ldots, E_p)$ mais ne contient pas E_2.

   b) Comme $E_n(\mathbb{C})$ est un ouvert inclus dans $D_n(\mathbb{C})$, il est inclus dans l'intérieur $\mathring{D_n}(\mathbb{C})$.

   Soit A un point intérieur à $D_n(\mathbb{C})$.

   Il existe $\delta > 0$ tel que $B(A, \delta) \subset D_n(\mathbb{C})$.

   Raisonnons par l'absurde et supposons que $A \notin E_n(\mathbb{C})$. Ainsi A est diagonalisable mais a une valeur propre au moins double.

Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda & & & \\ & & & \mu_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_{n-p} \end{pmatrix}$ avec $\mu_1, \dots, \mu_{n-p} \in \mathbb{C}$ distincts de $\lambda \in \mathbb{C}$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Posons $\varepsilon = \frac{\delta}{n^2||P||.||P^{-1}||}$ (où $||.|| = ||.||_\infty$)

Soit B comme dans la question précédente.

Posons $A' = PBP^{-1}$. La matrice A' n'est diagonalisable puisque B ne l'est pas.

Or $||A' - A|| < \delta$, ce qui est une contradiction.

Ainsi $\boxed{\text{l'intérieur de } D_n(\mathbb{C}) \text{ est } E_n(\mathbb{C})}$

Partie III - Classes de similitudes :

8. a) La matrice $P_\lambda^{-1}TP_\lambda$ se déduit de $T = (t_{i,j})$ en divisant (respectivement : multipliant) la 1ère ligne (respt : colonne) par λ, la seconde par λ^2, etc...

$$\text{Ainsi } P_\lambda^{-1}TP_\lambda = \begin{pmatrix} t_{1,1} & \lambda t_{1,2} & \dots & \dots & \dots & \lambda^{n-1}t_{1,n} \\ & t_{2,2} & \lambda t_{2,3} & & & \lambda^{n-2}t_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & t_{n-1,n-1} & \lambda t_{n-1,n} \\ & & & & & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

b) Supposons A nilpotente. Il existe $Q \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure stricte telles que $A = QTQ^{-1}$.

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = QP_{1/k}^{-1}TP_{1/k}Q^{-1}$.

Par continuité du produit matriciel, (A_k) converge vers $Q0Q^{-1} = 0$.

De plus pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k \in C_A$.

Donc $\boxed{\text{la matrice nulle appartient à l'adhérence de } C_A}$

9. Supposons que $0 \in \overline{C_A}$

Alors il existe une suite (M_k) de matrices de C_A convergeant vers 0.

Par continuité de l'application $M \mapsto \chi_M$, la suite (χ_{M_k}) converge vers $\chi_0 = X^n$.

Or la suite (χ_{M_k}) est constante de valeur χ_A donc converge vers χ_A.

Par unicité de la limite, $\boxed{\chi_A = X^n \text{ donc } A \text{ est nilpotente}}$

10. On suppose C_A est fermée.

On peut écrire $A = QTQ^{-1}$ avec T triangulaire supérieure.

Dans les notations de la question 8), la suite (A_k) converge vers QDQ^{-1} où D est la matrice diagonale ayant les mêmes coefficients diagonaux que T.

Comme C_A est fermée, A est semblable à QDQ^{-1} donc à D.

Donc A est diagonalisable.

11. On suppose que A est diagonalisable. On considère $B \in \overline{C_A}$ et note $(M_p)_{p \geqslant 0} \in C_A^{\mathbb{N}}$ telle que $(M_p) \to B$. On note π_A le polynôme minimal de A.

a) Pour tout $p \geqslant 0$, M_p et A sont semblables donc ont même polynôme minimal, donc

$$\pi_A(M_p) = \pi_{M_p}(M_p) = 0$$

Notant $\pi_A = X^K + \alpha_{k-1}X^{k-1} + \ldots + \alpha_0$, l'application $M \mapsto \pi_A(M) = M^k + \alpha_{k-1}M^{k-1} + \ldots + \alpha_0 I_n$ est continue par continuité du produit matriciel

Donc $(\pi_A(M_p))$ converge vers $\pi_A(B)$.

Par unicité de la limite, $\pi_A(B) = 0$.

Or $\boxed{\pi_A \text{ est scindé à racines simples}}$ donc $\boxed{B \text{ est diagonalisable}}$

b) Pour tout $p \geqslant 0$, M_p et A sont semblables donc ont même polynôme caractéristique, donc $\chi_{M_p} = \chi_A$.

Par continuité de l'application $M \mapsto \chi_M$, on a donc $\chi_B = \chi_A$.

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A répétées selon leur multiplicité.

Comme A et B sont diagonalisables, elles sont toutes deux semblables à la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Donc $\boxed{B \text{ est semblable à } A}$

Donc $B \in C_A$.

Ainsi $\boxed{C_A \text{ contient tous ses points intérieurs, donc est fermée}}$