1 - Question préliminaire

1. Il s'agit de démontrer que la relation ORTS, définie par :

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n,\ A \text{ est ORTS à } B \iff \exists Q \in \mathrm{O}_n,\ B = Q^\top AQ,$$

est réflexive, symétrique et transitive.

- *Réflexivité :* $\forall A \in \mathscr{M}_n$, A est ORTS à A, car $I_n \in \mathrm{O}_n$ et $A = {I_n}^\top A I_n$.
- *Symétrie :* $\forall A, B \in \mathscr{M}_n$, A est ORTS à $B \Longrightarrow B$ est ORTS à A, car si $Q \in \mathrm{O}_n$ est telle que $B = Q^\top AQ$, alors $Q^\top = Q^{-1} \in \mathrm{O}_n$ et $A = QBQ^\top = (Q^\top)^\top BQ^\top$.
- *Transitivité :* $\forall A, B, C \in \mathscr{M}_n$, A est ORTS à B et B est ORTS à $C \Longrightarrow A$ est ORTS à C, car si $Q, Q' \in \mathrm{O}_n$ sont telles que $B = Q^\top AQ$ et $C = (Q')^\top BQ'$, alors $QQ' \in \mathrm{O}_n$ et
$$C = (Q')^\top Q^\top AQQ' = (QQ')^\top A(QQ')$$

Donc la relation ORTS est bien une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n$.

2. Soient $A \in \mathscr{M}_n$ et $X, Y \in E_n$.
$(AX|Y) = (AX)^\top Y = X^\top A^\top Y = (X|A^\top Y)$

2 - Exemples

3. (a) Soit $S \in \mathscr{S}_n$. On a $S^\top = S$, donc :
   - ($\mathscr{C}_1$) $S^\top = S = P(S)$ où P est le monôme $P(X) = X$.
   - ($\mathscr{C}_2$) S est normale puisqu'elle commute avec $S^\top = S$.
   - ($\mathscr{C}_3$) Pour tout $X \in E_n$, $\|S^\top X\| = \|SX\|$ de façon évidente.
   - ($\mathscr{C}_4$) D'après le théorème spectral, S est ORTS à une matrice diagonale, donc diagonale par blocs avec des blocs diagonaux tous de taille $(1, 1)$, donc S vérifie ($\mathscr{C}_4$).

   (b) Soit $A \in \mathscr{A}_n$. On a $A^\top = -A$, donc :
   - ($\mathscr{C}_1$) $A^\top = -A = P(A)$ où P est le monôme $P(X) = -X$.
   - ($\mathscr{C}_2$) A est normale puisqu'elle commute avec $A^\top = -A$.
   - ($\mathscr{C}_3$) Pour tout $X \in E_n$, $\|A^\top X\| = \|-AX\| = \|AX\|$ par homogénéité de la norme.

4. Soit $Q \in \mathrm{O}_n$. On a $Q^\top = Q^{-1} \in \mathrm{O}_n$, donc :
   - ($\mathscr{C}_2$) Q est normale puisqu'elle commute avec $Q^\top = Q^{-1}$.
   - ($\mathscr{C}_3$) Pour tout $X \in E_n$, $\|Q^\top X\| = \|X\| = \|QX\|$ puisque les endomorphismes de E_n canoniquement associés à Q et $Q^\top = Q^{-1}$ sont des isométries.
   Remarque : Cela se retrouve par le calcul $\|QX\|^2 = (QX)^\top QX = X^\top Q^\top QX = X^\top X = \|X\|^2$.

5. La matrice $T \in \mathrm{O}_2$ est de type $R(\theta)$ ou $S(\theta)$, où $\theta \in \mathbb{R}$ (voir les rappels de cours en préambule).

   (a) Cas $T = S(\theta)$.
   Dans ce cas, la matrice $M = rT$ est symétrique réelle, donc d'après la question 2, elle vérifie les conditions ($\mathscr{C}_1$) à ($\mathscr{C}_4$).

   (b) Cas $T = R(\theta)$.
   Dans ce cas, la matrice $M = rT = rR(\theta)$ vérifie la condition ($\mathscr{C}_4$) de façon évidente (M est ORTS à elle-même), et elle vérifie la condition ($\mathscr{C}_1$) puisque
$$M^\top = r\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = 2r\cos(\theta)I_2 - r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$
   donc $M^\top = P(M)$ où $P(X) = 2r\cos(\theta) - X \in \mathbb{R}[X]$.

3 - Deux premières implications

6. Si A vérifie $(\mathscr{C}_1)$, alors A vérifie $(\mathscr{C}_2)$ puisque la matrice A commute avec tout polynôme en A.

7. Supposons que A vérifie $(\mathscr{C}_2)$, c'est-à-dire que $AA^\top = A^\top A$. Alors pour tout $X \in E_n$:

$$\|A^\top X\|^2 = (A^\top X)^\top A^\top X = X^\top A A^\top X \overset{(\mathscr{C}_2)}{=} X^\top A^\top A X = (AX)^\top AX = \|AX\|^2.$$

   Donc $\forall X \in E_n$, $\|A^\top X\| = \|AX\|$ (puisque les normes sont positives).

   Cela montre bien que A vérifie $(\mathscr{C}_3)$.

4 - La condition $(\mathscr{C}_3)$ implique la condition $(\mathscr{C}_4)$

8. On suppose que $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2$ vérifie la condition $(\mathscr{C}_3)$, c'est-à-dire que $\forall X \in E_2$, $\|A^\top X\| = \|AX\|$.

   (a) Montrons qu'on a nécessairement $b = c$ ou ($b = -c \neq 0$ et $a = d$).

   - Pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $\|AX\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \|A^\top X\| = \sqrt{a^2 + c^2}$, donc $b^2 = c^2$, ce qui implique $b = \pm c$.
     Si $b = c$, alors on a le résultat voulu.
   - Sinon, alors $b = -c \neq 0$ et pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a alors :

$$\|A^\top X\|^2 = (a+b)^2 + (d-b)^2 = \|AX\|^2 = (a-b)^2 + (b+d)^2$$

     Après simplification $(a-d)b = (d-a)b$, et donc $a = d$ puisque $b \neq 0$.

   On a donc bien nécessairement $b = c$ ou ($b = -c \neq 0$ et $a = d$).

   (b)
   - Si $b = c$, alors A est symétrique réelle donc A vérifie $(\mathscr{C}_4)$ d'après la question 2.
   - Si $b = -c \neq 0$ et $a = d$, alors

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = rR(\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

     où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ sont tels que $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$, i.e. où r et θ sont respectivement le module et un argument du complexe $a + ib$ (on a bien $r > 0$ car $b \neq 0$).
     Donc dans ce cas, A vérifie $(\mathscr{C}_4)$ de façon évidente (A est ORTS à elle-même).

   Dans tous les cas, la matrice A vérifie donc bien la condition $(\mathscr{C}_4)$.

9. En revenant à la définition de la norme associée au produit scalaire, on a, pour tout $X \in E_n$:

   - $\|(A - \lambda I_n)X\|^2 = X^\top (A^\top - \lambda I_n)(A - \lambda I_n)X = X^\top (A^\top A - \lambda A - \lambda A^\top + \lambda^2 I_n)X$.
     $= X^\top A^\top A X - \lambda X^\top A X - \lambda X^\top A^\top X + \lambda^2 X^\top X$
   - $\|(A - \lambda I_n)^\top X\|^2 = X^\top (A - \lambda I_n)(A^\top - \lambda I_n)X = X^\top (AA^\top - \lambda A - \lambda A^\top + \lambda^2 I_n)X$.
     $= X^\top A A^\top X - \lambda X^\top A X - \lambda X^\top A^\top X + \lambda^2 X^\top X$

   Or A vérifie $(\mathscr{C}_3)$ donc $X^\top A^\top A X = (AX)^\top AX = \|AX\|^2 = \|A^\top X\|^2 = (A^\top X)^\top A^\top X = X^\top A A^\top X$.
   Ainsi $\forall X \in E_n$, $\|(A - \lambda I_n)X\| = \|(A - \lambda I_n)^\top X\|$ (car les normes sont positives).

   Cela signifie que $A - \lambda I_n$ vérifie $(\mathscr{C}_3)$.

10. (a) Vu la question précédente (et la séparation de la norme), pour tout $X \in E_n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I_n)X = 0_{E_n} &\iff \|(A - \lambda I_n)X\| = 0 \\ &\iff \|(A - \lambda I_n)^\top X\| = 0 \\ &\iff (A - \lambda I_n)^\top X = (A^\top - \lambda I_n)X = 0_{E_n}. \end{aligned}$$

   Ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(A^\top - \lambda I_n)$, et donc les matrices A et $A^\top$ ont les mêmes sous-espaces propres.

(b) Soient $\lambda \neq \mu$ dans $\mathbb{R}$ et soient $X \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ et $Y \in \mathrm{Ker}(A - \mu I_n) = \mathrm{Ker}(A^\top - \mu I_n)$. Alors $AX = \lambda X$ et $A^\top Y = \mu Y$, donc :

$$\lambda(X|Y) = (AX|Y) \overset{\text{Q1}}{=} (X|A^\top Y) = \mu(X|Y)$$

et donc $(X|Y) = 0$ puisque $\lambda \neq \mu$.
Les sous-espaces propres de A sont donc bien deux à deux orthogonaux.

11. Montrons que A, qui vérifie $(\mathscr{C}_3)$, est diagonalisable si et seulement si elle est symétrique.

- Si A est symétrique réelle, alors A est diagonalisable d'après le théorème spectral.
- Supposons A diagonalisable. Alors ses sous-espaces propres sont supplémentaires dans E_n (caractérisation de la diagonalisabilité), et d'après la question 10, ils sont deux à deux orthogonaux.
  En concaténant des bases orthonormales des sous-espaces propres de A, on obtient donc une base orthonormale de diagonalisation de A, donc la matrice de passage P de la base canonique à cette base de diagonalisation est orthogonale et telle que $D = P^{-1}AP = P^\top AP$ est diagonale.
  Ainsi $A = PDP^\top$ est symétrique puisque $A^\top = (PDP^\top)^\top = PD^\top P^\top = PDP^\top = A$.

12. Montrons que toute matrice orthogonalement semblable à A vérifie $(\mathscr{C}_3)$.
Soient $Q \in \mathrm{O}_n$ et $B = Q^\top AQ$. Alors pour tout $X \in E_n$, sachant que $QQ^\top = Q^\top Q = I_n$:

- $\|BX\|^2 = (BX)^\top BX = X^\top B^\top BX = X^\top Q^\top A^\top QQ^\top AQX = X^\top Q^\top A^\top AQX = \|AQX\|^2$
- $\|B^\top X\|^2 = (B^\top X)^\top B^\top X = X^\top BB^\top X = X^\top Q^\top AQQ^\top A^\top QX = X^\top Q^\top AA^\top QX = \|A^\top QX\|^2$

Or A vérifie $(\mathscr{C}_3)$ et $QX \in E_n$, donc $\|AQX\| = \|A^\top QX\|$. Ainsi $\forall X \in E_n$, $\|BX\| = \|B^\top X\|$ (car les normes sont positives), i.e. B vérifie $(\mathscr{C}_3)$.

13. Montrons que A est ORTS à une matrice de type $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ où $A_1 \in \mathscr{M}_p$ et $A_2 \in \mathscr{M}_{n-p}$ vérifient $(\mathscr{C}_3)$, avec $p \in \{1, 2\}$.

- D'après le théorème 1 du préambule, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A admet une droite ou un plan stable. Notons F ce sous-espace stable, $p \in \{1, 2\}$ sa dimension, et Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ adaptée à F (i.e. commençant par une base orthonormale de F).
  Alors Q est orthogonale (comme matrice de passage entre deux bases orthonormales) et la matrice $B = Q^{-1}AQ = Q^\top AQ$ est la matrice de f dans une base adaptée au sous-espace stable F, donc est triangulaire supérieure par blocs, de type

$$B = Q^\top AQ = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

  où $A_1 \in \mathscr{M}_p$, $A_2 \in \mathscr{M}_{n-p}$ et où A_3 est une matrice réelle de taille $(p, n-p)$.
- Montrons que $A_3 = 0$.
  D'après l'indication montrée en (a), la matrice B vérifie la condition $(\mathscr{C}_3)$, donc $\forall X \in E_n$, $\|BX\|^2 = \|B^\top X\|^2$
  Ceci vaut en particulier pour $X = \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $Y \in E_p$, et donc

$$|| \begin{pmatrix} A_1 Y \\ 0 \end{pmatrix} ||^2 = || \begin{pmatrix} A_1^\top Y \\ A_3^\top Y \end{pmatrix} ||^2$$

  c'est-à-dire

$$||A_1 Y||^2 = ||A_1^\top Y||^2 + ||A_3^\top Y||^2 \qquad (*)$$

Dans cette dernière égalité, $||.||$ désigne à la fois la norme euclidienne canonique (racine carrée de la somme des carrés des coefficients) sur E_p et sur E_{n-p} (pour le deuxième terme du membre de droite)

Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, en remplaçant Y par le j-ème vecteur de la base canonique de E_p, on obtient :

$$||C_j||^2 = ||L_j||^2 + ||\Lambda_j||^2$$

où C_j est la j-ème colonne de A_1, L_j est la j-ème ligne de A_1 et Λ_j est la j-ème ligne de A_3.

Sommant ces relations pour $j \in [\![1,p]\!]$ on obtient :

$$||A_1||^2 = ||A_1||^2 + ||A_3||^2$$

où $||.||$ désigne à la fois la norme de Schur (racine carrée de la somme des carrés des coefficients) sur $\mathscr{M}_p$ et sur $\mathscr{M}_{p,n-p}$.

Donc $||A_3|| = 0$ et ainsi $A_3 = 0$.

- On déduit alors de la relation $(*)$ que A_1 vérifie $(\mathscr{C}_3)$.

  Un calcul analogue avec $X = \begin{pmatrix} 0 \\ Z \end{pmatrix}$ avec $Z \in E_{n-p}$ montre que A_2 vérifie également $(\mathscr{C}_3)$.

14. Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\forall A \in \mathscr{M}_n$, A vérifie $(\mathscr{C}_3) \Longrightarrow A$ vérifie $(\mathscr{C}_4)$.

- *Initialisation.*

  Le cas $n = 1$ est trivial puisque toute matrice de $\mathscr{M}_1$ vérifie $(\mathscr{C}_3)$ et $(\mathscr{C}_4)$.

  Le cas $n = 2$ a été démontré en question 8.

- *Hérédité.*

  Soit $n \geqslant 3$ tel que toute matrice carrée de taille $\leqslant n - 1$ vérifiant $(\mathscr{C}_3)$ vérifie aussi $(\mathscr{C}_4)$.

  Soit alors $A \in \mathscr{M}_n$ vérifiant $(\mathscr{C}_3)$.

  D'après la question 12, A est orthogonalement semblable à une matrice $B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ où $A_1 \in \mathscr{M}_p$ et $A_2 \in \mathscr{M}_{n-p}$ vérifient $(\mathscr{C}_3)$, avec $p \in \{1, 2\}$. Par hypothèse de récurrence, les matrices A_1 et A_2 vérifient donc aussi $(\mathscr{C}_4)$, i.e. sont ORTS à des matrices B_1 et B_2 diagonales par blocs avec des blocs diagonaux de type (λ) ou $rR(\theta)$, où $r > 0$ et $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$.

  Notons $Q_1 \in \mathrm{O}_p$ et $Q_2 \in \mathrm{O}_{n-p}$ des matrices telles que $B_1 = Q_1^\top A_1 Q_1$ et $B_2 = Q_2^\top A_2 Q_2$. Alors un calcul par blocs donne :

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1^\top & 0 \\ 0 & Q_2^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$$

  et la matrice $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$ est orthogonale puisque

$$Q^\top Q = \begin{pmatrix} Q_1^\top & 0 \\ 0 & Q_2^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1^\top Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2^\top Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = I_n.$$

  Ainsi par transitivité de la relation ORTS, A est ORTS à la matrice $\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$, qui est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type (λ) ou $rR(\theta)$, où $r > 0$ et $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$, puisque c'est le cas de B_1 et B_2. Ainsi A vérifie $(\mathscr{C}_4)$.

- *Conclusion.*

  On en déduit par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si $A \in \mathcal{M}_n$ vérifie $(\mathscr{C}_3)$, alors A vérifie $(\mathscr{C}_4)$.

5 - La condition $(\mathscr{C}_4)$ implique la condition $(\mathscr{C}_1)$

15. (a) On utilise le théorème d'existence et d'unicité des polynômes interpolateurs de Lagrange. Comme $z_1, \ldots, z_n$ sont deux à deux distincts, pour tout $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, il existe un unique polynôme P de degré au plus $n-1$ tel que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], P(z_i) = \alpha_i$$

En particulier, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], P(z_i) = \overline{z_i}$$

(b) On suppose de plus que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\overline{z_k} \in Z$, donc on a aussi $P(\overline{z_k}) = \overline{\overline{z_k}} = z_k$.
Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$ revient à montrer que $\overline{P} = P$, où $\overline{P}$ est le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P. Et vu l'unicité montrée en (a), il suffit pour cela de montrer que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\overline{P}(z_k) = \overline{z_k}$.
Or il est clair que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z})$, donc pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\overline{P}(z_k) = \overline{P(\overline{z_k})} = \overline{z_k}$.
On a donc bien $\overline{P} = P$, i.e. $P \in \mathbb{R}[X]$.

16. Notons $\chi(X) = X^2 - \mathrm{tr}(rR(\theta))X + \det(rR(\theta)) = X^2 - 2r\cos(\theta)X + r^2 = (X - r\mathrm{e}^{i\theta})(X - r\mathrm{e}^{-i\theta})$ le polynôme caractéristique de la matrice $rR(\theta)$, et

$$P(X) = \chi(X)B(X) + aX + b$$

la division euclidienne de P par χ, où $B \in \mathbb{R}[X]$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

Puisque $\chi(r\mathrm{e}^{i\theta}) = 0$, on a $P(r\mathrm{e}^{i\theta}) = ar\mathrm{e}^{i\theta} + b = r\mathrm{e}^{-i\theta}$, i.e. en séparant les parties réelle et imaginaire :

$$ar\cos(\theta) + b = r\cos(\theta) \quad \text{et} \quad ar\sin(\theta) = -r\sin(\theta).$$

Et comme χ est annulateur de $rR(\theta)$ (par le théorème de Cayley-Hamilton ou par calcul direct), on obtient :

$$P(rR(\theta)) = arR(\theta) + bI_2 = \begin{pmatrix} ar\cos(\theta) + b & -ar\sin(\theta) \\ ar\sin(\theta) & ar\cos(\theta) + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) & r\sin(\theta) \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} = (rR(\theta))^\top$$

Remarque : Si $\sin(\theta) = 0$, alors $P(r\cos(\theta)) = r\cos(\theta)$, et $rR(\theta) = r\cos(\theta)I_2$, donc de façon évidente, $P(rR(\theta)) = rR(\theta) = (rR(\theta))^\top$. Mais il n'est pas nécessaire de distinguer ce cas dans les calculs précédents.

17. Soit $A \in \mathscr{M}_n$ vérifiant $(\mathscr{C}_4)$, i.e. A est orthogonalement semblable à une matrice $B \in \mathscr{M}_n$ diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type (λ) ou $rR(\theta)$, où $r > 0$ et $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$.

Soit alors $Q \in \mathrm{O}_n$ telle que $B = Q^\top AQ$, i.e. telle que $A = QBQ^\top$.

Notons $(\lambda_1), \ldots, (\lambda_p)$ les (éventuels) blocs diagonaux de B de taille $(1,1)$, et $r_1R(\theta_1), \ldots, r_qR(\theta_q)$ les (éventuels) blocs diagonaux de B de taille $(2,2)$, et posons :

$$Z = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p, r_1\mathrm{e}^{i\theta_1}, r_1\mathrm{e}^{-i\theta_1}, \ldots, r_q\mathrm{e}^{i\theta_q}, r_q\mathrm{e}^{-i\theta_q}\}.$$

Par construction, pour tout $z \in Z$, on a $\overline{z} \in Z$, et donc d'après la question 13, appliquée en notant $z_1, \ldots, z_n$ les éléments deux à deux distincts de la liste $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, r_1\mathrm{e}^{i\theta_1}, r_1\mathrm{e}^{-i\theta_1}, \ldots, r_q\mathrm{e}^{i\theta_q}, r_q\mathrm{e}^{-i\theta_q}$, il existe un polynôme réel P tel que pour tout $z \in Z$, $P(z) = \overline{z}$, i.e. tel que :

$$\forall k \in [\![1; p]\!], P(\lambda_k) = \lambda_k \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1; q]\!], P(r_k\mathrm{e}^{i\theta_k}) = r_k\mathrm{e}^{-i\theta_k}.$$

D'après la question 14, on a alors $\forall k \in [\![1; q]\!]$, $P(r_kR(\theta_k)) = (r_kR(\theta_k))^\top$, et donc par un calcul par blocs, $P(B) = B^\top$. On conclut alors avec le théorème 2 du préambule que :

$$P(A) = QP(B)Q^\top = QB^\top Q^\top = (QBQ^\top)^\top = A^\top.$$

Donc A vérifie $(\mathscr{C}_1)$.

Remarque : On a ainsi montré par les questions 7, 8, 15 et 18 que les conditions $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$, $(\mathscr{C}_3)$ et $(\mathscr{C}_4)$ sont équivalentes.